Lösning tenta MMGF20/LGMA50
14/3 2017, Elin Götmark

1) Vi använder kedjeregeln för att få derivatorna i de nya variablerna:

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2f'_u + f'_v$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -f'_u - f'_v.$$

Vi löser ut x och y ur variabelbytet:

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u - 2v. \end{cases}$$

Då blir diffekvationen i de nya variablerna:

$$e^{-v}(2f'_u + f'_v) + 2e^{-v}(-f'_u - f'_v) + 3(u-v) - 2(u-2v) = 0$$

$$-e^{-v} f'_v + u + v = 0$$

$$f'_v = (u+v)e^{v}$$

Vi integrerar varje sida i v

$$f = \int (u+v)e^{v}\,dv = ue^{v} + \int ve^{v}\,dv =$$

$$= ue^{v} + \underbrace{ve^{v} - \int 1 \cdot e^{v}\,dv}_{\text{från partiell int.}} = (u+v)e^{v} - e^{v} + g(u) =$$

$$= (u+v-1)e^{v} + g(u) =$$

$$= (2x-y+x-y-1)e^{x-y} + g(2x-y) =$$

$$= \underline{\underline{(3x-2y-1)e^{x-y} + g(2x-y)}}$$

2) a.) $z = 2x + xy + y^2 \iff F(x,y,z) = 2x + xy + y^2 - z = 0$

Då är $\nabla F = (2+y,\ x+2y,\ -1)$ normal till ytan. $\nabla F(2,-1,3) = \underline{\underline{(1,0,-1)}}$ är alltså normal till ytan i punkten $(2,-1,3)$.

(Extrakoll: $f(2,-1) = 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)^2 = 3$, så punkten ligger faktiskt på ytan.)

b) Vi får $f'_v(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} =$

$= (1,0) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

normerad riktningsvektor.

$\nabla f(2,-1)$ är de två första komponenterna i $\nabla F(2,-1,3)$.

c.) Kurvan ligger på ytan, vi får den genom att gå genom punkten $(2,-1,3)$ och hålla x konstant och låta y löpa.

$f(2, 1+t) = 2\cdot 2 + 2\cdot(1+t) + (1+t)^2 = 4 + 2 + 2t + t^2 + 2t + 1$,

så $r(t) = (2,\ 1+t,\ t^2+4t+7)$. $r'(t) = (0,\ 1,\ 2t+4)$.

Vilket t motsvarar $(2,1,3)$?

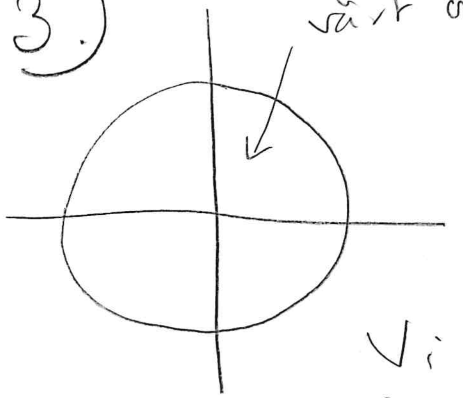
$(2,1,3) = (2,\ 1+t,\ t^2+4t+7)$. Vi måste ha $1 = 1+t$, dvs $t=-2$

Då blir $(-2)^2 + 4\cdot(-2) + 7 = 3$, dvs $r(-2) = (2,1,3)$.

Tangentvektorn blir då. $r'(-2) = (0,\ 1,\ -4+4) = (0,1,0)$.

Tangenten blir: $\underline{\underline{x(t) = (2,1,3) + t(0,1,0)}}$.

3.) vårt område, kalla det D.



Vi vet att funktionen antar ett största/minsta värde på D eftersom D är kompakt.

Vi letar först lokala min/max i det inre:

$$\begin{cases} f'_x = e^{-x^2-y^2} + (x+y)\cdot(-2x)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = e^{-x^2-y^2} + (x+y)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Dela m. $e^{-x^2-y^2}$: $1 + 2x^2 + 2xy = 0$ (1)

$1 + 2y^2 + 2xy = 0$ (2)

(1) − (2) ger: $2x^2 - 2y^2 = 0 \iff y = \pm x$

Sätt in i (1): $2x^2 \pm 2x^2 = -1$

ger antingen $\underset{(\text{när } y=-x)}{0=-1}$ (olösbar) eller $\underset{(\text{när } y=x)}{4x^2 = 1} \iff x = \pm\frac{1}{2}$

Enda lösningarna är alltså $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{2}}$

På randen kan vi sätta $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$.

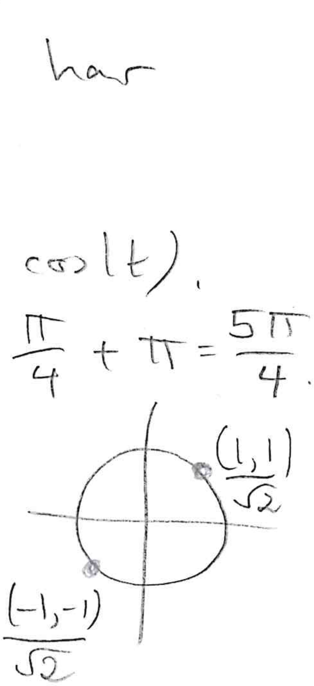
f blir då $\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\cdot e^{-1}$. När har

$g(t) = \cos(t) + \sin(t)$ min/max?

$g'(t) = -\sin(t) + \cos(t) = 0 \iff \sin(t) = \cos(t)$.

Dessa är lika när $t = \frac{\pi}{4}$ eller $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-1} = \sqrt{2}e^{-1}$



$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-1}$

Vi ser att $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$ ← störst eftersom $e > 2$.

och $\sqrt{2}e^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{e}$

Svar: Max: $e^{-\frac{1}{2}}$ Min: $-e^{-\frac{1}{2}}$

4.) Vi gör variabelbytet $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 2x + y \end{cases}$. De nya gränserna blir då $1 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 0$.
Vad är funktionaldeterminanten?

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

Så $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\frac{1}{3}$. Vi behöver också lösa ut x och y:

$$\left.\begin{matrix} 2v - u = 3x \\ 2u - v = 3y \end{matrix}\right\}.$$

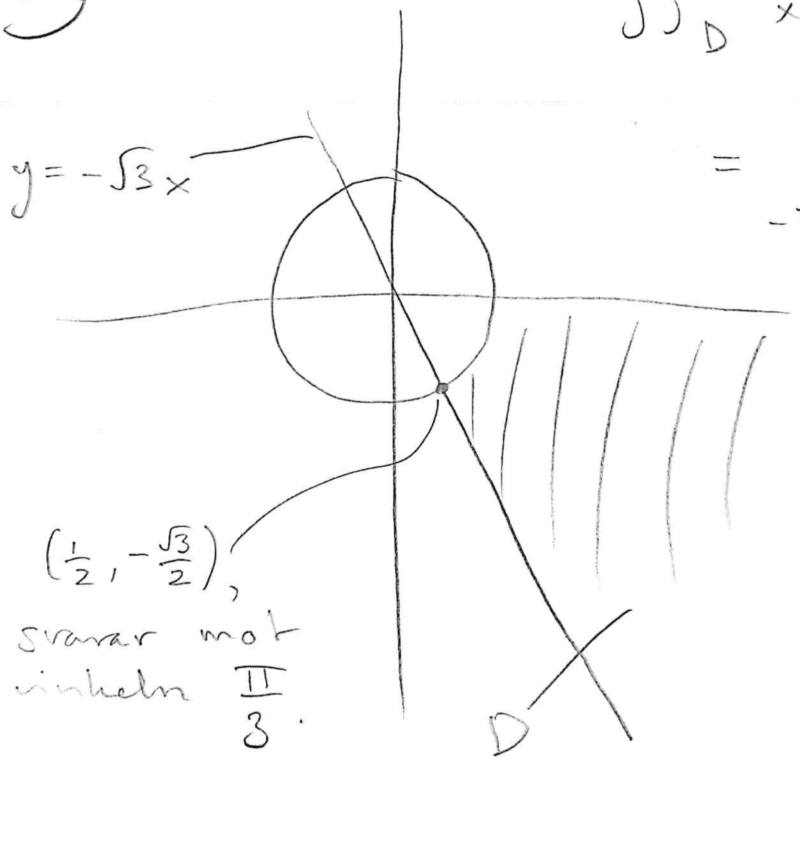
Så $\iint_D 3x + 3y \, dx\,dy =$

$$= \int_1^2 \int_{-1}^0 (\underbrace{2v - u + 2u - v}_{u+v}) \frac{1}{3} \, dv\,du =$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_{-1}^0 du = \frac{1}{3} \int_1^2 u - \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \left(4 - 2 - (1 - 1) \right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

5.)



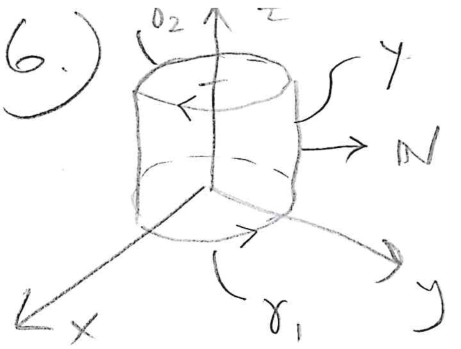
$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx\,dy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \int_1^\infty \frac{1}{r^2} \cdot r \, dr\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left[\ln(r) \right]_1^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\underbrace{\lim_{R \to \infty} \ln(R)}_{= \infty} - \ln(1) \right)$$

<u>Svar</u>: Divergent.

6.) 

$$\iint_Y (\text{rot}\,\mathbb{F})\cdot\mathbb{N}\,dS = \int_{\gamma_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} + \int_{\gamma_2}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

Vi kan parametrisera γ_1 med $\mathbb{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $0 \le t \le 2\pi$, så $\mathbb{r}_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$. Då är

$$\int_{\gamma_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}_1 = \int_0^{2\pi} P(\mathbb{r}_1(t))\cdot(-\sin(t)) + Q(\mathbb{r}_1(t))\cdot\cos(t)\,dt.$$

Vi kan parametrisera γ_2 med

$\mathbb{r}_2(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$ och gå motsatta vägen runt.

$\mathbb{r}_2'(t) = \mathbb{r}_1'(t)$.

$$\int_{\gamma_2}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}_2 = \int_{2\pi}^{0} P(\mathbb{r}_2(t))\cdot(-\sin(t) + Q(\mathbb{r}_2(t))\cdot\cos(t)\,dt =$$

$= -\int_{\gamma_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}_1$ eftersom P och Q bara beror av x och y, och x- och y-komponenterna av $\mathbb{r}_1$ och $\mathbb{r}_2$ är lika. Alltså är $HL = 0$ i ekvationen överst, och vi är klara.

7.) a.) Se

b.) $u(x,y) = x^2y$ uppfyller $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$.

8.) Se