Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa, bifogat formelblad
MATEMATIK Telefon: Matteo Molteni, 0703-088304
CTH/GU 2015–03–20 kl. 08.30–12.30

MMGF30: Transformteori och analytiska funktioner VT2015, 4.5 p.

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

Obs. Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar kommer att läggas in på kursens webbsida senast måndagen efter tentan. Skrivningarna är färdigrättade senast den 26:e mars. Tid för granskning kommer att anges på kurs-hemsidan. Var och en av uppgifterna kan ge 3p utom nr 1 som kan ge 4p. Lycka till!

1. a) Bestäm reella och imaginära delen av funktionen: $f(x+\imath y)=f(z)=e^z/(z-\imath)$. Argumentera varför funktioner är analytiska.

   b) Hitta moduls och argument av kompleksa talet $\left(\frac{\imath+1}{2\imath-3}\right)^5$

   c) Hitta rötter till andragradekvationen $z^2-2(\imath+1)z-1+2\imath=0$

   d) Hitta logaritmen av talen: $\imath^{2\imath}, \sin\imath$.

   e) Beräkna $x^\imath$ för reella $x\neq 0$ ock avgör om det finns ett gränsvärde $\lim_{x\to 0}x^i$ eller de ensidiga gränsvärden.

2. Bestäm alla singulära punkter och motsvarande residyerna till funktionerna: $\frac{1}{z^3+1}, \frac{z}{e^z-1}$, $(z+\pi)e^{1/z^2}$.

3. Avgör om det finns en analytisk funktion $f(z)=u(x,y)+\imath v(x,y)$ som har $u(x,y)=x^3-2xy^2$ som sin reella delen. Om svaret är ja, hitta $f(z)$. Detsamma för $u(x,y)=x^3-3xy^2$

4. Beräkna följande reel integral: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(3x)}{x^2-2x+5}dx$ med hjälp av kompleksanalys.

5. Bestäm Fourierserien (i kompleksa eller trig. formen) till 2π-periodiska funktionen som är lika med x^2 för $-\pi\le x\le 0$ och lika med 0 för $0<x<\pi$. Motivera varför och för vilka x som serien konvergerar. Hitta summan av serien för $x=0, x=-\pi/2, x=\pi$.

6. Lös med hjälp av Fouriertransformation differentialekvation $y(x)'-2y''(x)-8y'''(x)=2\delta(x)$ $(y(x)\to 0$ för $y\to\pm\infty)$

7. Lös med hjälp av Laplacetransformation differentialekvation

$$y''+y+\int_0^t\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau, t>0;\ y(0)=0, y'(0)=1.$$

8. Lös med hjälp av Laplacetransformation differentialekvation $y''-4y'+13y=\phi(t)+t^2$, $y(0)=1, y'(0)=-1$, där $\phi(t)=\sin(t)$ för $0<t<\pi$ och $\phi(t)=0$ för andra t.

GR

Formelblad för MMGF030, läsåret 13/14.

Trigonometriska formler

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

Fourierserier

Fourierserien med period $2L$ till en funktion f på $[-L, L]$ definieras med $\omega = \pi/L$ genom $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$; där

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos k\omega t\, dt, k = 0, 1, 2, \ldots \text{ och } b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin k\omega t\, dt, k = 1, 2, \ldots$$

På komplex form är serien $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$ där $c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-ik\omega t}\, dt$

Parsevals formel $2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2\, dt$

Fouriertransform

$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\, dt$ och $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega$. (OBS! Inversionssatsen!)

Parseval-Plancherels formel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\, dt$

Några speciella fouriertransformer

funktion	**transform**
$u(t)e^{-at}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a - i\omega}$
$u(-t)e^{at}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a + i\omega}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$u(t+T) - u(t-T)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega}$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \Omega t}{t}$	$u(\omega + \Omega) - u(\omega - \Omega)$

Räkneregler för Fouriertransform

	funktion	**transform**
skalning	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}\widehat{f}(\frac{\omega}{a})$
tidstranslation	$f(t-T)$	$e^{i\omega T}\widehat{f}(\omega)$
frekvenstranslation	$e^{-i\Omega t}f(t)$	$\widehat{f}(\omega - \Omega)$
tidsderivering	$f'(t)$	$-i\omega\widehat{f}(\omega)$
frekvensderivering	$tf(t)$	$-i\widehat{f}\,'(\omega)$
tidsfaltning*	$f \star g(t)$	$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$
frekvensfaltning*	$f(t)g(t)$	$\widehat{f}(\omega) \star \widehat{g}(\omega)$

OBS! Här är faltning som i boken dvs i samband med fourietransformer $f \star g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)\, dy$

Räkneregler för Laplacetransformer

funktion	**transform**
$F(t)$	$f(s)$
$F'(t)$	$sf(s) - F(0)$
$F^{(n)}(t)$	$s^n f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} F^{(k-1)}(0)$
$t^n F(t)$	$(-1)^n f^{(n)}(s)$
$F(t-a)u(t-a)$ där $a > 0$	$e^{-as} f(s)$
$e^{at} F(t)$	$f(s-a)$
$F(at)$ där $a > 0$	$\frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$
$F(t+p) = F(t)$ för alla t, $(p > 0)$	$\dfrac{1}{1-e^{-ps}} \displaystyle\int_0^p e^{-st} F(t)\, dt$
$\int_0^t F(u)\, du$	$\dfrac{1}{s} f(s)$
$\frac{F(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty f(v)\, dv$
$F_1 * F_2(t)$	$f_1(s) f_2(s)$

Laplacefaltningen: $F_1 * F_2(t) = \displaystyle\int_0^t F_1(t-x) F_2(x)\, dx.$

Några Laplacetransformationer

funktion	**transform**
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
$t \sin bt$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\dfrac{1}{(s^2+b^2)^2}$
$H(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1