Transformationer och analytiska funktioner

MMGF30

2015-03-20

1

Lösningar.

1. a. $$\frac{e^z}{z-i} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y)(x-iy+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)}$$

$$= \frac{e^x(\cos y + i\sin y)(x-iy+i)}{x^2+(y-1)^2}$$

och separera reella och imag. delar.

b. $\frac{i+1}{2i-3}$; ~~trans~~ transformerar till trig. formen

$|i+1| = \sqrt{2}$; $\arg(i+1) = \frac{\pi}{4}$

$|2i-3| = \sqrt{13}$; $\arg(2i-3) = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{2}{3}$

$$\left|\frac{i+1}{2i-3}\right| = \sqrt{\frac{2}{13}}$$

$$\arg\left(\frac{i+1}{2i-3}\right) = -\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{i+1}{2i-3}\right)^5 = \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{5}{2}} e^{i\cdot 5\left(-\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{2}{3}\right)}$$

Rem. svaret kan ha en annan form beroende av formen av arg.

c. $z = i+1 \pm \sqrt{2i-2i+1} = i+1\pm 1$

d. $i^{2i} = e^{2i \ln i}$ enligt def.

$\ln i = \ln|i| + i \arg i + 2\pi n i$

$\ln|i| = 0$

$\ln i = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$

$2i \ln i = -2(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = \ln i^{2i}$

$\sin i = i \sinh 1$; $\ln \sin i = \ln \sinh(1) + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

e. $x^i = e^{i \ln x}$. för $x > 0$: $= \cos \ln x + i \sin \ln x$

för $x < 0$, $= e^{i(\pi + \ln|x|)}$

$= -\cos \ln|x| - i \sin \ln x$

i båda fall, oscilerar vid $x \to 0$ och har inte något gränsvärde.

2. a) $\frac{1}{z^3+1}$; sing. punkter:

$$z^3+1=0, \quad z=(-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1=-1, \quad z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z_3=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z^3+1=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{1}{z^3+1}=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^3+1}=\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \text{ osv.}$$

b. $\frac{z}{e^z-1}$; sing. punkter $z=i2\pi n$

$n=0$: $\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=1$ - en hävbar punkt

$n\neq 0$; $\lim_{z\to 2\pi ni}\frac{z\cdot(z-2\pi ni)}{e^z-1}=$

$=\lim_{z\to 2\pi ni}\frac{z(z-2\pi ni)}{e^{(z-2\pi ni)}-1}=2\pi ni$

c. $(z+\pi)\,e^{\frac{1}{z^2}}$, $z=0$ en väsentligt singul. punkt

$$(z+\pi)\,e^{\frac{1}{z^2}}=(z+\pi)\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!\,z^4}+\dots\right)$$

$$=z+\pi+\frac{1}{z}+\frac{\pi}{z^2}+\dots$$

$$\text{Res}=\underline{1}.$$

3. $u = x^3 - 2xy^2$ satisfierar inte Laplaceekv. $\Delta u = 0$; kan inte vara reella delen av en anal. funktion.

$u = x^3 - 3xy^2$ satisfierar Laplace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$v = 3x^2y - y^3 + C(x)$$

sätter i den andra C-R; kommer $C' = 0$

svar: $u + iv = f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 - 2x + 5}\,dx$$

$$= \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3iz}}{z^2 - 2z + 5}\,dz\right) = \operatorname{Im} \overbrace{2\pi i}^{} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \frac{e^{3iz}}{z^2 - 2z + 5}$$

en sing. punkt, $z = 1 + 2i$

5. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-inx}\,dx =$$

– 2 ggr part. integr.

summa:

$$\sum c_n e^{inx} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{(\pi^2 + 0)}{2}, & x = \pi \end{cases}$$

OBS! i sista fallet använder vi konvergenssatsen.

6. $y' - 2y'' - 8y''' = 2\delta(x)$

$\mathcal{F}$:

$$(-i\omega)\hat{y} - 2(-i\omega)^2\hat{y} - 8(-i\omega)^3\hat{y}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega(2\omega - 8i\omega^2 - i)}$$

$y(x)$ hittas genom invertering

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega}}{\omega(2\omega - 8i\omega^2 - i)}$$

med hjälp av residuesatsen.

Obs, 1. $\omega = 0$ ligger på integreringslinje, räknas med koeff. $\frac{1}{2}$

Obs 2. olika formler för $x > 0$ och $x < 0$.

7. $y'' + y + \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\,d\tau = 0$

$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

funktionen $f(t)$ är inte angiven; svaret skulle uttryckas genom f

$Y = \mathcal{L}(y);\ F = \mathcal{L}(f)$

<u>Laplace:</u>

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{F(s)}{(s^2+1)^2};$$

inverterar

$$y(t) = \sin t - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{(s^2+1)^2}\right)$$

använder faltningsregel

$$= \sin t - f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left(\left(s^2+1\right)^{-2}\right)$$

$$= \sin t - f(t) * \left[\sin t + t\cos t\right]$$

8. $y'' - 4y' + 13y = \varphi(t) + t^2$ $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

$\mathcal{L}$:

$$Y(s)\,(s^2 - 4s + 13) = s - 5 + \frac{2}{s^3} + \mathcal{L}(\varphi)$$

$$Y(s) = \frac{\left(s - 5 + \frac{2}{s^3}\right)}{s^2 - 4s + 1} + \frac{\mathcal{L}(\varphi)}{s^2 - 4s + 1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s - 5 + \frac{2}{s^3}}{s^2 - 4s + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(\varphi)}{s^2 - 4s + 1}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^4 - 5s^3 + 2}{s^3\,(s^2 - 4s + 1)}\right)$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4s + 1}\right) * \varphi(t)$$

De inversa Laplace ovan hittas med Bromwich.