MATEMATIK
Göteborgs universitet

Skriv ditt speciella tentanummer
på varje inlämnat papper.

Tentamensskrivning: MMGF30 Transformteori och analytiska funktioner
Datum: 2012-03-09 kl 8.30-12.30
Hjälpmedel: Typgodkänd räknare, handboken Beta och bifogat formelblad.
Telefonvakt:

Obs. Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar kommer att läggas in på kursens webbsida senast dagen efter tentan. Skrivningarna är färdigrättade senast den 30:e mars. Tid för granskning kommer att anges på kurshemsidan. Var och en av uppgifterna kan ge 3p utom nr 1 som kan ge 4p. Lycka till!

1. (a) Lös ekvationen $z^3 = i$.
   (b) Bestäm realdelen av funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$.
   (c) För vilka reella värden på a är $u(x, y) = e^{ax} \sin y$ realdel av en analytisk funktion $f(z)$? Bestäm för varje sådant a-värde en motsvarande funktion $f(z)$, uttryckt i z.

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \frac{3z+4}{(z+2)(z+1)}\, dz$ där C är cirkeln $|z| = 5$ ett varv moturs.

3. Bestäm fourierserien för den udda och 2π-periodiska funktionen $f(x)$ som uppfyller $f(x) = \dfrac{2x}{\pi}$ då $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ och $f(x) = 2 - \dfrac{2x}{\pi}$ då $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

4. Bestäm, till exempel genom residykalkyl, fouriertransformen av funktionen $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

5. Bestäm med hjälp av laplacetransformering den lösning till differentialekvationen
$$X''(t) + 4X(t) = \sin t \;\text{ för }\; t > 0$$
som uppfyller $X(0) = 1$ och $X'(0) = 0$.

6. Bestäm, till exempel med fouriertransform, en funktion $f(x)$ så att för alla reella x gäller
$$f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy = e^{-|x|}$$
där $g(y) = e^{-|y|}$. Ledning: Tänk på faltning men också på hur det är med faktorn $1/\sqrt{2\pi}$ i det sammanhanget.

7. Låt funktionen $K(r, \theta)$ vara definierad för $0 \le r < 1$ och alla reella θ genom $K(r, \theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$
   (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} K(r, \theta)\, d\theta$
   (b) Beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} (K(r, \theta))^2\, d\theta$
   (c) Bevisa att $K(r, \theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$

8. (a) Bevisa Cauchys integralsats dvs att om Ω är ett enkelt sammanhängande område, C är en sluten kurva i Ω och $f(z)$ är analytisk i Ω så gäller $\displaystyle\int_C f(z)\, dz = 0$.
   (b) Ge ett exempel som visar att om man tar bort kravet att Ω är enkelt sammanhängande så behöver resultatet inte vara sant längre.

/J-E A