MATEMATIK
Göteborgs universitet

Skriv ditt speciella tentanummer på varje inlämnat papper.

Tentamensskrivning: MMGF30 Transformteori och analytiska funktioner
Datum: 2012-06-08, kl 8.30-12.30
Hjälpmedel: Typgodkänd räknare, handboken Beta och bifogat formelblad.
Telefonvakt:

Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Var och en av uppgifterna kan ge 3p utom nr 1 som kan ge 4p.
Lycka till!

1. (a) Bestäm imaginärdelen av talet $\dfrac{4+3i}{2+i}$.

   (b) Bestäm realdelen av funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$.

   (c) Bevisa att funktionen $u(x,y) = x^2 - 2y^2$ inte kan vara realdel till en analytisk funktion.

   (d) Funktionen $u(x,y) = x^3y - xy^3$ är realdel av en analytisk funktion, $f(z)$, sådan att $f(0) = 0$. Bestäm motsvarande imaginärdel $v(x,y)$.

2. Låt $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ och bestäm dess laurentserieutveckling av formen $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-1)^n$ som är konvergent i ett område av typen $0 < |z-1| < r$. Bestäm också det största möjliga värdet på sådana r.

3. I Beta kan man bland fourierserierna läsa följande formel
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2} \text{ då } 0 < t < 2\pi.$$

   (a) Bevisa detta samband, dvs att funktionen på högersidan har serien i vänsterledet som fourierserie.

   (b) Genom att använda Parsevals formel i samband med denna serie kan man beräkna summan av $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Genomför detta.

4. Beräkna genom residykalkyl integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$$

5. Låt $F(t)$ vara definierad genom $F(t) = 1 - t$ då $0 \le t \le 1$ och $F(t) = 0$ för övriga t-värden. Betrakta differentialekvationen
$$X''(t) + X(t) = F(t) \text{ för } t > 0$$
med begynnelse villkoren $X(0) = 0$ och $X'(0) = 0$.

   (a) Bestäm laplacetransformen $x(s)$ av lösningen $X(t)$.

   (b) Bestäm $X(t)$.

6. Bland formlerna för fouriertransformer finns att funktionen $e^{-a|t|}$ där $a > 0$ har transformen $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$.

   (a) Använd till exempel detta samband eller residykalkyl för att bestämma fouriertransformen av funktionen $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

   (b) Bestäm funktionen $f \star f(t)$, där f är samma funktionen som i (a). (Här låter vi faltningen vara definierad, som i boken vid fouriertransformer, genom $f \star f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(t-x)\,dx.$)

7. Låt $f(z) = \dfrac{1}{5 - 4\cos z}$. Bestäm alla singulära punkter för $f(z)$ och beräkna integralen $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ där C är cirkeln $|z| = 4$ ett varv moturs.

VÄND!

8. Cauchys integralformel säger att om $f(z)$ är analytisk på och innanför den slutna, positivt orienterade kurvan C och z_0 en punkt innanför C så gäller

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz.$$

   (a) Bevisa detta resultat.

   (b) Vilket värde har integralen om z_0 ligger utanför C? Glöm inte motivering!

/J-E A