**MATEMATIK**
**Göteborgs universitet**

Skriv ditt speciella tentanummer på varje inlämnat papper.

**Tentamensskrivning: MMGF30 Transformteori och analytiska funktioner**
Datum: 2012-08-30, kl 8.30-12.30
Hjälpmedel: Typgodkänd räknare, handboken Beta och bifogat formelblad.
Telefonvakt: 070 3088304

---

Obs. Alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Var och en av uppgifterna kan ge 3p utom nr 1 som kan ge 4p. Lycka till!

1. (a) Bestäm imaginärdelen av talet $\dfrac{2+3i}{4+i}$.

   (b) Bestäm realdelen av funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$.

   (c) Lös ekvationen $z^6 + 1 = 0$.

   (d) Bestäm alla komplexa tal $z$ sådana att $e^{iz} = 1 + i$.

2. Betrakta funktionerna $f(t) = e^t$ och $g(t) = e^{2t}$ för $t \geq 0$. Låt $f \star g(t)$ vara definierad som i samband med laplacetransformer i boken ( se formelbladet).

   (a) Beräkna $f \star g(t)$ med hjälp av enbart definitionen.

   (b) Beräkna nu istället $f \star g(t)$ med hjälp av laplacetransformen.

3. Betrakta den $2\pi$-periodiska funktionen $f(x) = \sin x \cos^2 x$.

   (a) Bestäm funktionens fourierserie både på komplex och trigonometrisk form.

   (b) Beräkna med hjälp av (a) integralen
   $$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

4. Använd residykalkyl för att beräkna
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} \, dx.$$

5. Betrakta systemet av differentialekvationer
   $$\begin{cases} X_1'(t) &= X_1(t) + 2X_2(t) \\ X_2'(t) &= 2X_1(t) - 2X_2(t) \end{cases}$$
   med $X_1(0) = 1$ , $X_2(0) = 3$. Lös detta med hjälp av laplacetransformering.

6. Antag att $f(z)$ är analytisk och begränsad i övre halvplanet $\operatorname{Im} z \geq 0$.

   (a) Bevisa att om $c = a + ib$, där $a$ och $b$ är reella med $b > 0$ så gäller
   $$f(c) = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x-c|^2} \, dx.$$

   (b) Bevisa med hjälp av (a) att om $u(x, y)$ är realdelen av $f(z)$, med $z = x + iy$, så gäller framställningen
   $$u(a, b) = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{(x-a)^2 + b^2} \, dx.$$

7. Antag att $f(x)$ är periodisk med perioden $2a$ och att man vet att funktionen $f(x)\,(u(x+a) - u(x-a))$ har fouriertransformen $C(\omega)$. Bevisa att då har $f(x)\,(u(x+3a) - u(x-3a))$ fouriertransformen $C(\omega)(1 + 2\cos 2a\omega)$. Hur ser motsvarande uttryck för transformen av $f(x)\,(u(x+5a) - u(x-5a))$ ut? Här är som vanligt $u(t)$ stegfunktionen som är 1 då $t > 0$ och 0 annars.

VÄND!

8. (a) Definiera vad som menas med att en komplex funktion $f(z)$ är analytisk.

   (b) Bevisa att om $u(x, y)$ och $v(x, y)$ är real- respektive imaginärdel av en analytisk funktion så uppfyller de Cauchy-Riemanns ekvationer.

   (c) Bevisa att om vi dessutom antar att funktionerna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ i (b) har kontinuerliga andraderivator så gäller

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

/J-E A