Lösningar till MMGF30 den 9:e mars 2012

1. (a) Vi skriver om högerledet på polär form och får ekvationen $z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}+ik\cdot 2\pi}$ vilket leder till rötterna

$$z_k = e^{i\frac{\pi}{6}+ik\cdot\frac{2\pi}{3}} \text{ för } k = 0, 1, 2$$

vilket också kan skrivas som

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\,,\, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{1}}{2}\,,\, z_3 = -i$$

(b) $\dfrac{1}{z+i} = \dfrac{1}{x+i(y+1)} = \dfrac{x-i(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$. Den sökta realdelen är alltså $\dfrac{x}{x^2+(y+1)^2}$

(c) Villkoret är att $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Vi har

$$u''_{xx} + u''_{yy} = e^{ax}(a^2-1)\sin y$$

så villkoret är $a = 1$ eller $a = -1$. För att bestämma en lämplig imaginärdel $v(x, y)$ använder vi Cauchy-Riemanns ekvationer: $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$. Den första ger oss

$$v_y = u'_x = ae^{ax}\sin y \text{ som leder till } v(x, y) = -ae^{ax}\cos y + h(x).$$

Vi sätter in detta i den andra av CR-ekvationerna och får att det skall gälla

$$e^{ax}\cos y = a^2e^{ax}\cos y - h'(x).$$

Eftersom vi räknar med förutsättningen $a^2 = 1$ är detta uppfyllt med t.ex. $h(x) = 0$ så vi har då $v(x, y) = -ae^{ax}\cos y$ och

$$f(z) = e^{ax}\sin y - i\cdot ae^{ax}\cos y.$$

På reella axeln gäller då med $x = z$ och $y = 0$ att $f(z) = -i\cdot ae^{az}$ och eftersom båda sidorna är analytiska leder detta till att likheten gäller i hela planet. Resultatet är alltså att a skall vara ± 1 och att $f(z) = -ie^z$ om $a = 1$ och $f(z) = ie^{-z}$ om $a = -1$.

2. Låt $f(z) = \dfrac{3z+4}{(z+2)(z+1)}$. Vi ser att $f(z)$ har två singulära punkter, $z = -2$ och $z = -1$ vilka båda ligger innanför cirkeln. Vi beräknar då residyerna i dessa punkter och ser att residyn i $z = -2$ är värdet av $f(z) = \dfrac{3z+4}{z+1}$ i $z = -2$ dvs residyn är 2. På samma sätt får vi residyn i $z = -1$ som värdet av $f(z) = \dfrac{3z+4}{z+2}$ i $z = -1$ dvs 1. Vi får därför $\displaystyle\int_C \frac{3z+4}{(z+2)(z+1)}\,dz = 2\pi i(2+1) = 6\pi i$

3. Eftersom funktionen är udda innehåller fourierserien bara sinustermer och vi har

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Funktionen är kontinuerlig och styckvis deriverbar så genom partiell integration och att $f(0) = f(\pi) = 0$ får vi

$$\frac{\pi}{2}\cdot b_n = \left[-f(x)\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

dvs

$$b_n = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{8}{\pi^2n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

4. Transformen definieras av

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}e^{i\omega x}\,dx.$$

Vi låter $g(z) = f(z)e^{i\omega z}$ och börjar med att betrakta fallet $\omega \geq 0$. I övre halvplanet gäller då $|e^{i\omega z}| \leq 1$, så vi har att $|zg(z)| \to 0$ då $z \to \infty$ i övre halvplanet. Detta innebär att om vi låter C_R vara halvcirkeln $z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$, så gäller $\int_{C_R} g(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$. Funktionen $g(z)$ har två singulära punkter $z = \pm i$, där alltså bara $z = i$ ligger i övre halvplanet. För $R > 1$ har vi

$$\int_{-R}^{R} g(z)\,dz + \int_{C_R} g(z)\,dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(g,i)$$

vilket då $R \to \infty$ alltså ger oss

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(g,i).$$

För att beräkna denna residy observerar vi att

$$g(z) = \frac{\phi(z)}{(z-i)^3} \text{ där } \phi(z) = (z+i)^{-3}e^{i\omega z}$$

och att vi därigenom har att

$$\text{Res}(g,i) = \frac{\phi''(i)}{2!}.$$

Eftersom

$$\phi'(z) = -3(z+i)^{-4}e^{i\omega z} + i\omega(z+i)^{-3}e^{i\omega z}$$

och alltså

$$\phi''(z) = 12(z+i)^{-5}e^{i\omega z} - 6i\omega(z+i)^{-4}e^{i\omega z} - \omega^2(z+i)^{-3}e^{i\omega z}$$

får vi

$$\text{Res}(g,i) = \frac{\phi''(i)}{2!} = \frac{e^{-\omega}}{2}\left(\frac{12}{2^5 i^5} - \frac{6i\omega}{2^4 i^4} - \frac{\omega^2}{2^3 i^3}\right) = \frac{e^{-\omega}}{2^4 i}\left(3 + 3\omega + \omega^2\right).$$

Detta leder alltså till att för $\omega \geq 0$ gäller

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(g,i) = \frac{\sqrt{\pi}e^{-\omega}}{8\sqrt{2}}\left(3 + 3\omega + \omega^2\right).$$

Återstår att betrakta fallet $\omega < 0$. Enklast i det här fallet är kanske att observera att när $f(x)$ är jämn är $F(\omega)$ det. Detta kan ses genom att $\cos\omega x$ är en jämn funktion av ω och att

$$\sqrt{2\pi}F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx.$$

Vi har här utnyttjat att $f(x)\sin\omega x$ är en udda funktion av x så att motsvarande integral är 0.

Detta gör att vi i vårt fall får $F(\omega)$ för alla ω genom att ersätta ω med $|\omega|$ i det uttryck vi redan fått för positiva ω dvs

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}e^{-|\omega|}}{8\sqrt{2}}\left(3 + 3|\omega| + \omega^2\right).$$

5. Vi låter $x(s)$ vara laplacetransformen av $X(t)$. Då har $X''(t)$ transformen $s^2x(s) - sX(0) - X'(0) = s^2x(s) - s$ och eftersom $\sin t$ har transformen $1/(s^2+1)$ övergår differentialekvationen i

$$(s^2+4)x(s) = \frac{1}{s^2+1} + s \text{ dvs } x(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4}.$$

Genom partialbråksuppdening övergår detta i

$$x(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}$$

som leder till

$$X(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t + \cos 2t.$$

6. Med bokens definition av fouriertransform och faltning vet vi från formelsamlingen att $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{2}{\omega^2+1}$ och att $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$ har transform $F(\omega)G(\omega)$ så $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$ har transformen $\dfrac{2}{\omega^2+1} \cdot F(\omega)$. När vi transformerar likheten övergår den därför i

$$\left(1 + \frac{2}{\omega^2+1}\right) \cdot F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\omega^2+1}$$

vilket leder till

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\omega^2+3}.$$

Ur formelbladet får vi att transformen $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$ svarar mot funktionen $e^{-a|x|}$. Vi ser då att transformen $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{\omega^2+3}$ svarar mot funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\sqrt{3}|x|}$.

7. Vi observerar att för varje fixt r är $K(r,\theta)$ en 2π-periodisk funktion av θ som är definierad genom sin komplexa fourierserie, där koefficienterna ges av $c_n = r^{|n|}$. Vi använder detta i (a) och (b) nedan.

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} K(r,\theta)\,d\theta = 2\pi c_0 = 2\pi$

   (b) Med Parsevals formel och formeln för summan av en geometrisk serie har vi

$$\int_0^{2\pi} (K(r,\theta))^2\,d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{2|n|} = 2\pi \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}\right) = 2\pi \left(1 + \frac{2r^2}{1-r^2}\right) = 2\pi \cdot \frac{1+r^2}{1-r^2}.$$

   (c) Återigen med formeln för summan av en geometrisk serie har vi

$$K(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}.$$

   Eftersom $(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta}) = 1 - (re^{i\theta} + re^{-i\theta}) + r^2 = 1 - 2r\cos\theta + r^2$, så följer påståendet $K(r,\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$.