## Lösningar till MMGF30 den 8 juni 2012

1. (a) $\dfrac{4+3i}{2+i} = \dfrac{(4+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{11+2i}{5}$ vilket ger att imaginärdelen är $\dfrac{2}{5}$.

   (b) $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{x+1+iy} = \dfrac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}$. Alltså är realdelen $\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$.

   (c) Ett nödvändigt villkor på $u(x,y)$ för att vara realdel av en analytisk funktion är att $u''_{xx} + u'_{yy} = 0$. I vårt fall är $u''_{xx} + u'_{yy} = 2 - 4 \neq 0$.

   (d) För att bestämma imaginärdelen $v(x,y)$ använder vi Cauchy-Riemanns ekvationer: $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$. Den första ger oss att $v'_y = u'_x = 3x^2y - y^3$ vilket leder till att $v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + h(x)$ för någon funktion $h(x)$. När vi sätter in detta i den andra av C-R-ekvationerna,$v'_x = -u'_y$ får vi ekvationen $3xy^2 + h'(x) = -x^3 + 3xy^2$ dvs $h'(x) = -x^3$ och alltså $h(x) = -\frac{1}{4}x^4 + C$ dvs eftersom vi skall ha $v(0,0) = 0$

$$v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4}.$$

   Det efterfrågas inte men den analytiska funktionen $f(z)$ är alltså $f(z) = -i\dfrac{z^4}{4}$.

2. Vi observerar att $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$. Vi kan därför göra en taylorutveckling av $\dfrac{1}{z+1}$ kring $z = 1$ och därefter dividera med $(z-1)$. Som mellansteg låter vi $w = z-1$ och med hjälp av summan för en geometrisk serie få

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{w+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{w^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{(z-1)^k}{2^{k+1}}.$$

   Division med $z-1$ ger därför

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{(z-1)^{k-1}}{2^{k+1}} = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}.$$

   Det största möjliga värdet på $r$ ges av avståndet från punkten $z = 1$ till närmaste annan singulära punkt för $f(z)$. I vårt fall finns det bara ytterligare en singulär punkt, $z = -1$, så detta avstånd är alltså 2, vilket därmed är det största $r$-värdet.

3. (a) Vi låter $f(t) = (\pi - t)/2$ för $0 < t < 2\pi$ och beräknar dess fourierkoefficienter $a_n$ och $b_n$. För $n = 1, 2, \ldots$ har vi med partiell integration

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = \left[\frac{(\pi-t)}{2}\cdot\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\sin nt\,dt = 0 + 0 = 0$$

   och

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = \left[-\frac{(\pi-t)}{2}\cdot\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\cos nt\,dt = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n} + 0 = \frac{\pi}{n}.$$

   Det innebär alltså att för $n = 1, 2, \ldots$ har vi $a_n = 0$ och $b_n = 1/n$ men det återstår att undersöka $a_0$.

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \left[-\frac{(\pi-t)^2}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} = 0$$

   så även $a_0 = 0$. Sammantaget ger detta att funktionen $f(t)$ verkligen har den givna serien som sin fourierserie.

   (b) Vi använder Parsevals formel på den givna serien och får

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\pi-t)^2}{4}\,dt = \left[-\frac{(\pi-t)^3}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Låt
$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}.$$
Funktionen har fyra singulära punkter $z_k = e^{\frac{i\pi}{4}+\frac{ik\pi}{2}}$ för $k = 0,1,2,3$. Av dessa ligger de två första i övre halvplanet och de två sista i undre halvplanet. Med $C_R$ beteckningar vi halvcirkeln $z = Re^{i\theta}$, där $\theta$ går från 0 till $\pi$. Då gäller för $R > 1$
$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx + \int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\text{Res}(f,z_0) + \text{Res}(f,z_1)\right).$$
Eftersom integralen i uppgiften konvergerar $zf(z) \to 0$ då $z \to \infty$ har vi
$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx \text{ och } \int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz \to 0$$
då $R \to \infty$. Alltså gäller
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\left(\text{Res}(f,z_0) + \text{Res}(f,z_1)\right).$$
Eftersom singuariteterna är enkelpoler och funktionen är av typen $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ har vi dvs
$$\text{Res}(f,z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{z_k^{-1}}{4} = \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{i\pi}{4}-\frac{ik\pi}{2}}.$$
Speciellt har vi
$$\text{Res}(f,z_0) = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$
och
$$\text{Res}(f,z_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$
och alltså gäller
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\left(\text{Res}(f,z_0) + \text{Res}(f,z_1)\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{4}\left(-2\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

5. (a) Laplacetransformering ger
$$(s^2+1)x(s) = f(s) \text{ dvs } x(s) = \frac{f(s)}{s^2+1}$$
så problemet reduceras till att bestämma $f(s)$. Ett sätt är att använda definitionen direkt
$$f(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 (1-t)e^{-st}\,dt.$$
Vi gör partiell integration och får
$$f(s) = \left[-(1-t)\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^1 - \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\,dt = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}-1}{s^2} = \frac{s-1+e^{-s}}{s^2}.$$
Ett annat,snabbare, sätt är se att $F(t)$ kan framställas $F(t) = 1-t+(t-1)u(t-1)$. Med standardtransformer och räkneregeln att en funktion av formen $G(t-a)u(t-a)$ har transformen $e^{-as}g(s)$ får vi
$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2} = \frac{s-1+e^{-s}}{s^2}$$
Oavsett vilken av metoderna vi använt får vi alltså
$$x(s) = \frac{s-1+e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$

(b) Vi observerar att

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

vilket leder till att

$$x(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) \cdot e^{-s}.$$

När vi transformerar tillbaka får vi då

$$X(t) = 1 - \cos t - (t - \sin t) + (t-1-\sin(t-1)) \cdot u(t-1) = 1 - t - \cos t + \sin t + (t-1-\sin(t-1)) \cdot u(t-1)$$

eller annorlunda uttryckt

$$X(t) = \begin{cases} 1 - t + \sin t - \cos t & \text{då } t < 1 \\ \sin t - \cos t - \sin(t-1) & \text{då } t > 1 \end{cases}$$

6. (a) Inversionsformeln för fouriertransformen ger alltså likheten

$$e^{-a|t|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{\omega^2+a^2} \cdot e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

Om vi i denna integral först gör variabelsubstitutionen $x = -\omega$ och i den likhet som då uppkommer ersätter $t$ med den nu fria variabeln $\omega$ så har vi likheten

$$e^{-a|\omega|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{x^2+a^2} \cdot e^{i\omega x}\, dx.$$

Detta innebär alltså att vi har

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{x^2+a^2}\right) = e^{-a|\omega|}$$

Speciellt med $a = 1$ får vi därför

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\omega|}$$

(b) Vi vet att $\mathcal{F}(f \star f) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(f)$, vilket för vår funktion alltså innebär att

$$\mathcal{F}(f \star f) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\omega|}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-2|\omega|}.$$

Vårt samband

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{x^2+a^2}\right) = e^{-a|\omega|}$$

ger därför med $a = 2$ att

$$f \star f(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4}{t^2+4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{t^2+4}$$

7. De singulära punkterna till $f(z) = \dfrac{1}{5 - 4\cos z}$ är lösningarna till ekvationen $4\cos z = 5$. Med hjälp av Eulers formler har vi att ekvationen kan skrivas

$$4 \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 5 \ \text{ dvs } \ e^{i2z} - \frac{5}{2} \cdot e^{iz} + 1 = 0.$$

Med $w = e^{iz}$ kan ekvationen skrivas

$$w^2 - \frac{5}{2} \cdot w + 1 = 0 \ \text{ dvs } \ w = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

så rötterna är $w_1 = 2$ och $w_2 = 1/2$. För $z$ innebär detta att

$$e^{iz} = e^{\pm \ln 2 + k2\pi i} \ \text{ där } k \text{ är ett heltal}$$

dvs de singulära punkterna är $z = k2\pi \pm i \cdot \ln 2$ för $k = 0, \pm, \pm 2, \ldots$.

När det gäller integralen konsterar vi att eftersom $0 < \ln 2 < 1$ är det av de singulära punkterna bara $z = \pm \ln 2$ som ligger innanför integrationscirkeln, alla andra ligger utanför. Så vi får integralens värde genom att addera residyerna i dessa två punkter och sedan multiplicera med $2\pi i$. Som vanligt ser vi funktionen som en kvot $p(z)/q(z)$ och får residyn i en enkelpol $z_0$ som $p(z_0)/q'(z_0)$, i vårt fall $1/(4 \sin z_0)$. Eftersom de två singulära punkterna bara skiljer sig åt med ett minustecken och sinusfunktionen är udda skiljer sig residyerna i dessa två punkter bara genom ett minustecken. Summam av de två residyerna är alltså noll så vi har

$$\int_C \frac{1}{5 - 4\cos z}\, dz = 0.$$

Man skulle också verkligen ha räknat ut residyerna i de två punkterna. Eftersom

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

har vi

$$4 \sin(i \ln 2) = 4 \cdot \frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2i} = \frac{-3}{i}$$

och

$$4 \sin(-i \ln 2) = 4 \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2i} = \frac{3}{i}$$

så

$$\int_C \frac{1}{5 - 4\cos z}\, dz = 2\pi i \left( \frac{-i}{3} + \frac{i}{3} \right) = 0$$