Lösningar till MMGF30 den 30 augusti 2012

1. (a) $\dfrac{2+3i}{4+i} = \dfrac{(2+3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \dfrac{11+10i}{17}$ vilket ger att imaginärdelen är $\dfrac{10}{17}$.

   (b) $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{x-2+iy} = \dfrac{x-2-iy}{(x-2)^2+y^2}$. Alltså är realdelen $\dfrac{x-2}{(x-2)^2+y^2}$.

   (c) Vi skriver ekvationen på formen $z^6 = -1$. På polär form med $z = re^{i\theta}$ och $-1 = 1 \cdot e^{\pi 1 + n \cdot 2\pi i}$ där n är ett godtyckligt heltal ger detta oss $r^6 = 1$ och $6\theta = \pi 1 + n \cdot 2\pi i$ och alltså lösningen

$$z = e^{\frac{\pi i}{6} + n \cdot \frac{\pi i}{3}} \quad n = 0, 1, \dots, 5.$$

   (d) Vi skriver $1 + i$ på polär form

$$1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi i}{4}}$$

   vilket ger att ekvationen $e^{iz} = 1 + i$ är ekvivalent med

$$iz = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi i}{4} + n \cdot 2\pi i$$

   dvs

$$z = -\frac{i \ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

2. (a)

$$f \star g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du = \int_0^t e^{t-u} e^{2u}\, du = e^t \int_0^t e^u\, du = e^t(e^t - 1) = e^{2t} - e^t$$

   (b) Om $f(t)$ och $g(t)$ har transformerna $F(s)$ respektive $G(s)$ så har faltningen transformen $F(s)G(s)$. Vi har

$$F(s)G(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{(s-2)} = \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-1)}.$$

   Detta ger

$$f \star g(t) = e^{2t} - e^t$$

3. (a) Ett sätt är att starta med den trigonometriska framställningen och utnyttja den trigonometriska formeln

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

   en ger oss först

$$\sin x \cos^2 x = \sin x \cos x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos x$$

   och sedan

$$\sin x \cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) = \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x$$

   vilket alltså är den trigonometriska fourierserien. Dvs fourierkoefficienterna är $a_n = 0$ för alla n medan $b_n = 0$ för $n \neq 1, 3$ medan $b_1 = b_3 = 1/4$. För den komplexa formen använder vi Eulers formel

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

   och får

$$\sin x \cos^2 x = \frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix}) + \frac{1}{8i}(e^{i3x} - e^{-i3x}) = \frac{i}{8}(e^{-i3x} + e^{-ix} - e^{ix} - e^{i3x})$$

   vilket alltså är den komplexa fourierserien.

   (b) Parsevals formel för trigonometriska 2π-periodiska fourierserier ger

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right)$$

   vilket i vårt fall ger

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \pi(b_1^2 + b_3^2) = \pi\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{\pi}{8}$$

4. Funktionen $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)^2}$ har dubbelpolerna $z = \pm 3i$ och uppfyller $zf(z) \to 0$ då $z \to \infty$. Alltså är den givna integralens värde 2π gånger funktionens residy i övre halvplanet, dvs i punkten $z = 3i$.
Med $\phi(z) = (z-3i)^2 f(z) = z^2/(z+3i)^2$ är den sökta residyn $\phi'(3i)$. Eftersom

$$\phi'(z) = 2z(z+3i)^{-2} - 2z^2(z+3i)^{-3} = 6iz(z+3i)^{-3}$$

är $\phi'(3i) = 1/(12i)$. Alltså har den givna integralen värdet $2\pi i/(12i) = \pi/6$.

5. Laplacetransformering av systemet leder till

$$\begin{cases} sX_1 - 1 &= X_1 + 2X_2 \\ sX_2 - 3 &= 2X_1 - 2X_2 \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} (s-1)X_1 - 2X_2 &= 1 \\ -2X_1 + (s+2)X_2 &= 3 \end{cases}$$

Genom att multiplicera den första ekvationen med $(s+2)$ och den andra med 2 och sedan addera får vi

$$((s+2)(s-1)-4)X_1 = s+8$$

dvs

$$(s^2+s-6)X_1 = s+8$$

och alltså

$$X_1 = \frac{s+8}{(s+3)(s-2)} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s+3}$$

som ger

$$x_1(t) = 2e^{2t} - e^{-3t}.$$

Enklast är nu att se att den första av de ursprungliga ekvationerna ger

$$2x_2(t) = x_1'(t) - x_1(t) = 4e^{2t} + 3e^{-3t} - 2e^{2t} + e^{-3t}$$

och alltså

$$x_2(t) = e^{2t} + 2e^{-3t}$$

6. (a) Eftersom $f(x)$ är begränsad är den givna integralen konvergent för alla c som inte ligger på reella axeln. Låt

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-c)(z-\overline{c})}.$$

Då gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x-c|^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Integralen är alltså konvergent och $g(z)$ är analytisk i övre halvplanet utom för en enkelpol i c. Eftersom dessutom $zg(z) \to 0$ då $z \to \infty$ i övre halvplanet är integralens värde $2\pi i$ gånger residyn för $g(z)$ i $z = c$. Denna residy är $f(c)/(c-\overline{c}) = f(c)/(2bi)$ så vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x-c|^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \frac{\pi}{b}\,f(c)$$

varav det sökta resultatet följer.

(b) Vi har alltså $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ och speciellt $f(x) = u(x,0) + iv(x,0)$ och $f(c) = u(a,b) + iv(a,b)$ så genom att ta realdelen av båda sidor i (a) får vi den önskade formeln.

7. Funktionen $f(x)(u(x+a) - u(x-a))$ är 0 utanför intervallet $-a < x < a$ och överensstämmer med $f(x)$ inuti detta intervall. Det innebär att

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x)e^{i\omega x}\,dx.$$

På motsvarande sätt har funktionen $f(x)(u(x+3a)-u(x-3a))$ transformen

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3a}^{3a} f(x)e^{i\omega x}\,dx,$$

som vi kan dela upp som summa av tre delintegralerna

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3a}^{-a} f(x)e^{i\omega x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(x)e^{i\omega x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{3a} f(x)e^{i\omega x}\,dx.$$

I den första av dessa gör vi variabelsubstitutionen $x=t-2a$ och i den tredje $x=t+2a$ och får

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{-a} f(t-2a))e^{i\omega(t-2a)}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(x)e^{i\omega x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(t+2a)e^{i\omega(t+2a)}\,dt.$$

Vi utnyttjar sedan att f har period $2a$ så att $f(t-2a)=f(t)=f(t+2a)$ vilket leder till att

$$G(\omega)=e^{-i2a\omega}C(\omega)+C(\omega)+e^{i2a\omega}C(\omega)=C(\omega)(1+e^{-i2a\omega}+e^{i2a\omega})=C(\omega)(1+2\cos 2a\omega),$$

dvs den önskade formeln.

I analogi med ovanstående kan vi se att transformen av funktionen $f(x)(u(x+5a)-u(x-5a))$ kan skrivas

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-5a}^{-3a} f(x)e^{i\omega x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3a}^{3a} f(x)e^{i\omega x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{3a}^{5a} f(x)e^{i\omega x}\,dx$$

och i den första göra substitutionen $x=t-4a$ och i den tredje $x=t+4a$ och utnyttja att $f(t-4a)=f(t)=f(t+4a)$ så att den sökta transformen kan skrivas

$$e^{-i4a\omega}C(\omega)+G(\omega)+e^{i4a\omega}C(\omega)=G(\omega)+C(\omega)(e^{-i4a\omega}+e^{i4a\omega})=C(\omega)(1+2\cos 2a\omega+2\cos 4a\omega).$$