MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2018-03-16, 8:30-12:30

MMGF30, Transformteori och analytiska funktioner

- **Examinator:** Magnus Goffeng, tel: 772 10 91, Email: goffeng@chalmers.se
- **Telefonvakt:** Olof Giselsson, tel: 5325
- **Hjälpmedel:** Bifogat formelblad

Tentan har 5 frågor med totalt 100 poäng. Du har även kunnat få 10 bonuspoäng på inlämningarna innevarande läsår. Du behöver 50 poäng för godkänt (G) och 80 poäng för väl godkänt (VG) av dessa maximalt 110 poäng.

Fullständig poäng ges endast för fullständig lösning. Påståenden utan förklaring eller rättfärdigande får få eller inga poäng. Används något från formelsamlingen måste detta anges. Ges ett tips på en fråga, så är det bara ett tips och får inte användas utan förklaring eller rättfärdigande. Flera av frågorna har flera delar, läs igenom dem noga innan du börjar så du inte missar någon del.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Tenta

Fråga 1 Vi betraktar funktionen $f(z) := \mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}}$, $z \neq -1$.

(a) Visa att f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer för $z \neq -1$. (12 poäng)

(b) Karakterisera alla singulariteter till f. (8 poäng)

Lösning. a) Vi kan skriva $f = h \circ g$ där

$$h(w) := \mathrm{e}^w \quad \text{och} \quad g(z) := \frac{1}{z+1}.$$

Funktionen h är analytisk för alla w och g är analytisk för alla $z \neq -1$. Därför är $f = h \circ g$ analytisk för $z \neq -1$. Analytiska funktioner uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer (enligt Sats 6.5 i Agarwal-Perera-Pinelas).

Lösning. b) Eftersom f är analytisk utanför $z = -1$ är $z = -1$ den enda singulariteten till f. Vi Laurentutvecklar för $|z+1| > 0$:

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z+1} \right)^k = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(z+1)^k}{(-k)!}.$$

Eftersom det förekommer oändligt många negativa exponenter i Laurentutvecklingen av f kring $z = -1$, så är $z = -1$ en essentiell singularitet.

Fråga 2 (a) Formulera Cauchys integralformel. (5 poäng)

(b) Låt $f(z) := \frac{1}{z^3+4z}$. Räkna ut $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ där Γ är en moturs orienterad, enkel, sluten och styckvis glatt kurva i övre halvplanet som inte innehåller någon singularitetet till f. (15 poäng)

Lösning. a) Se Sats 17.1 i Agarwal-Perera-Pinelas.

Lösning. b) Vi skriver

$$f(z) = \frac{1}{z^3+4z} = \frac{1}{z}\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z}\frac{1}{z+2i}\frac{1}{z-2i} = \frac{g(z)}{z-2i},$$

där $g(z) := \frac{1}{z}\frac{1}{z+2i}$. Funktionen g är analytisk i övre halvplanet, så Cauchys integralformel ger att

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{g(z)}{z-2i}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i g(2i), & \text{om } \Gamma \text{ innesluter } 2i, \\ 0, & \text{om } \Gamma \text{ ej innesluter } 2i, \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi i}{4}, & \text{om } \Gamma \text{ innesluter } 2i, \\ 0, & \text{om } \Gamma \text{ ej innesluter } 2i. \end{cases}$$

Fråga 3 Betrakta den 2-periodiska funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ som uppfyller $f(x) = 1$ om $x \in [0, 1)$ och $f(x) = -1$ om $x \in (1, 2)$.

(a) Visa att Laplacetransformen av f ges av

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{-z}}{z(1+\mathrm{e}^{-z})}. \qquad \text{(10 poäng)}$$

(b) Finn och klassificera singulariteterna i $\mathbb{C}$ till Laplacetransformen av f. (10 poäng)

Lösning. a) Enligt uttrycket i formelsamlingen nedan för Laplacetransformen av periodiska funktioner så är

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(z) &= \frac{\int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-2z}} = \frac{\int_0^1 \mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t - \int_1^2 \mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-2z}} = \frac{(1-\mathrm{e}^{-z})\int_0^1 \mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-2z}} = \\ &= \frac{(1-\mathrm{e}^{-z})\frac{1}{z}\left[-\mathrm{e}^{-zt}\right]_{t=0}^1}{1-\mathrm{e}^{-2z}} = \frac{(1-\mathrm{e}^{-z})^2}{z(1-\mathrm{e}^{-2z})} = \frac{(1-\mathrm{e}^{-z})^2}{z(1-\mathrm{e}^{-z})(1+\mathrm{e}^{-z})} = \frac{1-\mathrm{e}^{-z}}{z(1+\mathrm{e}^{-z})}.\end{aligned}$$

Lösning. b) Laplacetransformen $\mathcal{L}f$ har möjliga poler då $z=0$ och då $1+\mathrm{e}^{-z}=0$.

Vi börjar med att undersöka $z=0$ och skriver

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{g(z)}{z}, \quad \text{där} \quad g(z) := \frac{1-\mathrm{e}^{-z}}{1+\mathrm{e}^{-z}}.$$

Funktionen g är analytisk kring $z=0$. Eftersom $g(0)=0$ så är $z=0$ en hävbar singularitet till $\mathcal{L}f$.

Alla lösningar till ekvationen $1+\mathrm{e}^{-z}=0$ är på formen $z=\pi(2k+1)i$ för något heltal $k\in\mathbb{Z}$. Vi kan Taylorutveckla

$$1+\mathrm{e}^{-z} = 1-\mathrm{e}^{-(z-\pi(2k+1)i)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-\pi(2k+1)i)^k.$$

Det följer nollstället till $1+\mathrm{e}^{-z}$ i $\pi(2k+1)i$ är av ordning 1, så f har en pol av ordning 1 i $\pi(2k+1)i$.

Fråga 4 Definiera den 2-periodiska funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ enligt

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ -1, & x\in(1,2). \end{cases}$$

(a) Fourierutveckla f. (10 poäng)

(b) Låt $T_0>0$ vara en konstant. Lös värmeekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ T(0,t) = T(1,t) = 0, \\ T(x,0) = T_0, \end{cases}$$

genom att ansätta $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\pi x)$ och att använda att $T_0 = T_0 f(x)$ om $x\in[0,1]$. (10 poäng)

Lösning. a) Funktionen f är udda, så vi sinusutvecklar $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$ där

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\mathrm{d}x = -2\left[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{x=0}^1 = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ udda}, \\ 0, & n \text{ jämn}. \end{cases}$$

Därför är

$$f \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}.$$

Lösning. b) Likt i a), sätter vi

$$b_n := \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ udda}, \\ 0, & n \text{ jämn}. \end{cases}$$

Ansatsen $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\pi x)$ uppfyller randvillkoret $T(0,t) = T(1,t) = 0$. Vidare, så är $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ekvivalent med

$$a_n' = -n^2\pi^2 a_n.$$

Initialvillkoret $T(x,0) = T_0$ är ekvivalent med att

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin(n\pi x) = T_0 = T_0\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

Då Fourierkoefficienter är entydigt bestämda, så är $a_n(0) = T_0 b_n$. Det följer att

$$a_n(t) = b_n T_0 \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} = \begin{cases} \frac{4T_0}{n\pi}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}, & n \text{ udda}, \\ 0, & n \text{ jämn}. \end{cases}$$

Därför är

$$T(t,x) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}.$$

Fråga 5 Låt $a > 0$ vara ett tal.

(a) Räkna ut $f_1 * f_2$ där $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ges av

$$f_1(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad \text{och} \quad f_2(x) := \mathrm{e}^{-a|x|}. \qquad \text{(12 poäng)}$$

(b) Finn en integrabel lösning $u \in L^1(\mathbb{R})$ till differentialekvationen

$$-u'' + a^2 u = f_1. \qquad \text{(8 poäng)}$$

Lösning. a) Vi räknar ut att

$$f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-a|x-y|}\mathrm{d}y =$$

$$= \begin{cases} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{a(x-y)}\mathrm{d}y, \ x < -1, \\ \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-a(x-y)}\mathrm{d}y, \ x > 1, \\ \int_{-1}^{x} \mathrm{e}^{a(x-y)}\mathrm{d}y, + \int_{x}^{1} \mathrm{e}^{-a(x-y)}\mathrm{d}y, \ |x| \leq 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} \left[\frac{\mathrm{e}^{-ay}}{-a}\right]_{y=-1}^{1}, \ x < -1, \\ \mathrm{e}^{-ax} \left[\frac{\mathrm{e}^{ay}}{a}\right]_{y=-1}^{1}, \ x > 1, \\ \mathrm{e}^{ax} \left[\frac{\mathrm{e}^{-ay}}{-a}\right]_{y=-1}^{x} + \mathrm{e}^{-ax} \left[\frac{\mathrm{e}^{ay}}{a}\right]_{y=x}^{1}, \ |x| \leq 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{a}, \ x < -1, \\ \mathrm{e}^{-ax} \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{a}, \ x > 1, \\ \mathrm{e}^{ax} \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-ax}}{a} + \mathrm{e}^{-ax} \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{ax}}{a}, \ |x| \leq 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-a|x|} \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{a}, \ |x| > 1, \\ \frac{\mathrm{e}^{a}}{a} \left(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}\right) - \frac{2}{a}, \ |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Lösning. b) Låt $U := \mathcal{F}u$ beteckna Fouriertransformen av u. Ekvationen $-u'' + a^2 u = f_1$ är ekvivalent med att

$$(\xi^2 + a^2)U = \mathcal{F} f_1.$$

I andra ord kan vi formulera om ekvationen $-u'' + a^2 u = f_1$ som att

$$U = \frac{\mathcal{F} f_1}{\xi^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \mathcal{F} f_1 \mathcal{F} f_2 = \frac{1}{2a} \mathcal{F}(f_1 * f_2).$$

Det följer att

$$u(x) = \frac{1}{2a}(f_1 * f_2)(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-a|x|} \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2a^2}, \ |x| > 1, \\ \frac{\mathrm{e}^{a}}{2a^2} \left(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}\right) - \frac{1}{a^2}, \ |x| \leq 1, \end{cases},$$

enligt del a av uppgiften.

MG

Formelsamling

Trigonometriska identiteter

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A),$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A).$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Några Laplacetransformer

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	Definitionsmängd
1	$\frac{1}{z}$	$z > 0$
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$	$z > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$z > a$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$e^{at} cos(bt)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$t\cos(at)$	$\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$	$z > 0$
f P-periodisk	$\frac{\int_0^P f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-zP}}$	$z > 0$

Några Fourierserier

Nedan ges Fourierserierna av några funktioner på $[-\pi, \pi]$.

Funktion	Fourierserie
$f(x) = x$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
$f(x) = \|x\|$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$
$f(x) = F(\mathrm{e}^{ix})$ F analytisk nära enhetscirkeln	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx}$ med Laurentserie $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$
$f(x) = \|\sin(x)\|$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2-1}$
f P-periodisk funktion	$\sum_{n=-\infty\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi inx/P}$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx/P) + b_n \sin(2n\pi x/P))$ $c_n := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx/P}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{Z}$ $a_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2\ldots$ $b_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 1, 2\ldots$

Några Fouriertransformer

Nedan ges Fouriertransformer av några funktioner på $\mathbb{R}$.

Funktion	Fouriertransform
$f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$
$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$	$g(\xi)$
$f(x-c)$	$\mathrm{e}^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\mathcal{F}f(\xi)$
$xf(x)$	$i(\mathcal{F}f)'(\xi)$
$f * g$	$(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$
$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$
$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2}{a}\mathrm{e}^{-a\|\xi\|}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-a\|x\|}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$
$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$