MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2018-06-04, 8.30-12.30

MMGF30, Transformteori och analytiska funktioner

- **Examinator:** Magnus Goffeng, tel: 772 10 91, Email: goffeng@chalmers.se
- **Telefonvakt:** Jakob Hultgren, tel: 5325
- **Hjälpmedel:** Bifogat formelblad

Tentan har 5 frågor med totalt 100 poäng. Du har även kunnat få 10 bonuspoäng på inlämningarna innevarande läsår. Du behöver 50 poäng för godkänt (G) och 80 poäng för väl godkänt (VG) av dessa maximalt 110 poäng.

Fullständig poäng ges endast för fullständig lösning. Efterfrågas en sats måste tillbörliga antaganden göras. Påståenden utan förklaring eller rättfärdigande får få eller inga poäng. Används något från formelsamlingen måste detta anges. Ges ett tips på en fråga, så är det bara ett tips och får inte användas utan förklaring eller rättfärdigande. Flera av frågorna har flera delar, läs igenom dem noga innan du börjar så du inte missar någon del.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Tenta

Fråga 1 (a) Definiera logaritmen som en funktion av $z \in \mathbb{C}$. (5 poäng)

(b) Visa att logaritmen är analytisk utanför $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. (15 poäng)

Lösning. a) Se Föreläsning 9 i Agarwal-Perera-Pinelas.

Lösning. b) Se Sats 9.1 i Agarwal-Perera-Pinelas (alternativt: verifiera Cauchy-Riemanns ekvationer).

Fråga 2 Låt D beteckna enhetsdisken $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Antag att $f : D \to \mathbb{C}$ är en analytisk funktion med $f(0) = 1$ och $f(z) \neq 0$ för alla $z \in D$. För $z \in D$ låter vi Γ_z beteckna linjen i D mellan 0 och z.

(a) Förklara varför $F(z) := \int_{\Gamma_z} \frac{f'(w)\mathrm{d}w}{f(w)}$ löser differentialekvationen $F' = \frac{f'}{f}$. (5 poäng)

(b) Visa att

$$\left(\frac{\mathrm{e}^F}{f}\right)' = \frac{(F'f - f')\mathrm{e}^F}{f^2}. \qquad \text{(5 poäng)}$$

(c) Använd a) och b) till att visa att F uppfyller att $\mathrm{e}^F = f$. (10 poäng)

Lösning. a) Eftersom enhetsdisken är enkelt sammanhängande har den analytiska funktionen $\frac{f'}{f}$ en anti-derivata F_0 (det vill säga $F_0' = \frac{f'}{f}$, se Sats 14.2 i Agarwal-Perera-Pinelas). Funktionen F_0 är enligt Sats 14.1 i Agarwal-Perera-Pinelas bestämd upp till en konstant av egenskapen att

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f}\mathrm{d}w = F_0(\beta) - F_0(\alpha),$$

närhelst Γ är en kurva från α till β. På grund av vägoberoende av kurvintegraler av analytiska funktioner så är för en kurva Γ från α till β

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f}\mathrm{d}w = \int_{\Gamma_\beta} \frac{f'(w)\mathrm{d}w}{f(w)} - \int_{\Gamma_\alpha} \frac{f'(w)\mathrm{d}w}{f(w)} = F(\beta) - F(0) - (F(\alpha) - F(0)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Därför är F en antiderivata till $\frac{f'}{f}$.

Lösning. b) Vi använder kedjeregeln och kvotregeln för att räkna ut

$$\left(\frac{\mathrm{e}^F}{f}\right)' = \frac{fF'\mathrm{e}^F - f'\mathrm{e}^F}{f^2} = \frac{(F'f - f')\mathrm{e}^F}{f^2}.$$

Lösning. c) Enligt a) så är $F' = \frac{f'}{f}$, så $F'f - f' = 0$. Därför är

$$\left(\frac{\mathrm{e}^F}{f}\right)' = \frac{(F'f - f')\mathrm{e}^F}{f^2} = 0.$$

Då gäller det att $\frac{e^F}{f}$ är en konstant funktion, det vill säga att det finns ett $\lambda \in \mathbb{C}$ sådant att $e^F = \lambda f$. Men $F(0) = 0$ och $f(0) = 1$ så

$$\lambda = \lambda f(0) = e^{F(0)} = e^0 = 1.$$

Därför är $e^F = f$.

Fråga 3 (a) Finn den inversa Laplacetransformen till $\frac{1}{z^2+1}$. (5 poäng)

(b) Använd a) och Laplacetransformen till att finna en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ som uppfyller att

$$\begin{cases} u'(t) + \int_0^t u(s)\mathrm{d}s = t, \ t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Ledning: Visa först att $u'(0) = 0$ och differentiera sedan ekvationen. (15 poäng)

Lösning. a) Enligt formelsamlingen nedan är Laplacetransformen av $\sin(at)$ ($a \neq 0$) given av $\frac{a}{a^2+t^2}$. Sätt $a = 1$ så inses att den inversa Laplacetransformen av $\frac{1}{z^2+1}$ är $\sin(t)$.

Lösning. b) Vi differentierar ekvationen $u'(t) + \int_0^t u(s)\mathrm{d}s = t$ och får att

$$u''(t) + u(t) = 1.$$

Eftersom $u'(t) = t - \int_0^t u(s)\mathrm{d}s$ så är $u'(0) = 0$. Därför finner vi u genom att lösa ekvationen

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = 1, \ t > 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Laplacetransformerar vi denna ekvationen får vi att

$$z^2 \mathcal{L}u(z) + \mathcal{L}u(z) = \mathcal{L}1(z).$$

Därför är

$$\mathcal{L}u(z) = \frac{1}{z^2+1}\mathcal{L}1(z).$$

Faltningssatsen för Laplacetransformen och a) ger att

$$u(t) = (\sin *1)(t) = \int_0^t \sin(s)\mathrm{d}s = -\cos(t) + 1.$$

Fråga 4 Låt $0 < a < \pi$ vara ett tal och definiera den 2π-periodiska funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ enligt

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & a \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Visa att Fourierutvecklingen av f ges av

$$f \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{na} \cos(nx). \qquad \text{(13 poäng)}$$

(b) Använd Fourierutvecklingen av f till att visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$. (7 poäng)

Lösning. a) Funktionen f är jämn så $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ där $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ och för $n > 0$ så är

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Vi räknar ut att

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a\pi} \int_0^{a} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi},$$

och att för $n > 0$ så är

$$a_n = \frac{1}{a\pi} \int_0^{a} \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{\sin(na)}{\pi na}.$$

Lösning. b) Funktionen f är styckvis differentierbar och kontinuerlig i 0 så

$$\frac{1}{2a} = f(0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{na} \cos(n0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{an} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Vi får $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$ genom att lösa ut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}$ ur denna ekvation.

Fråga 5 För $t > 0$ definierar vi funktionen $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enligt

$$f_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

(a) Formulera faltningssatsen för Fouriertransformen. För full poäng krävs fullständiga antaganden. (5 poäng)

(b) Visa att $\mathcal{F} f_t(\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2}$. (5 poäng)

(c) Visa att för $s, t > 0$ så är $f_t * f_s = f_{s+t}$. (10 poäng)

Lösning. a) Se Proposition 7.2.4 i föreläsningsanteckningarna.

Lösning. b) Enligt formelsamlingen nedan är Fouriertransformen av e^{-ax^2} given av $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$. Med $a = \frac{1}{4t}$ så ges Fouriertransformen av $f_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-x^2/4t}$ av

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\xi^2/4a} = \frac{1}{\sqrt{4t}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4t}}} \mathrm{e}^{-t\xi^2} = \mathrm{e}^{-t\xi^2}.$$

Lösning. **c)** Vi har enligt faltningsatsen att $\mathcal{F}(f_t * f_s) = \mathcal{F}f_s \mathcal{F}f_t$. Men

$$(\mathcal{F}f_s \mathcal{F}f_t)(\xi) = \mathrm{e}^{-s\xi^2}\mathrm{e}^{-t\xi^2} = \mathrm{e}^{-(s+t)\xi^2} = \mathcal{F}f_{s+t}.$$

Därför är $\mathcal{F}(f_t * f_s) = \mathcal{F}f_{s+t}$. Enligt inversionssatsen är $f_t * f_s = f_{s+t}$.

MG

Formelsamling

Trigonometriska identiteter

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A),$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A).$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Några Laplacetransformer

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	Definitionsmängd
1	$\frac{1}{z}$	$z > 0$
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$	$z > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$z > a$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$e^{at} cos(bt)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$t\cos(at)$	$\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$	$z > 0$
f P-periodisk	$\frac{\int_0^P f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-zP}}$	$z > 0$

Några Fourierserier

Nedan ges Fourierserierna av några funktioner på $[-\pi, \pi]$.

Funktion	Fourierserie
$f(x) = x$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
$f(x) = \|x\|$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$
$f(x) = F(\mathrm{e}^{ix})$ F analytisk nära enhetscirkeln	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx}$ med Laurentserie $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$
$f(x) = \|\sin(x)\|$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2-1}$
f P-periodisk funktion	$\sum_{n=-\infty\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi inx/P}$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx/P) + b_n \sin(2n\pi x/P))$ $c_n := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx/P}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{Z}$ $a_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2\dots$ $b_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 1, 2\dots$

Några Fouriertransformer

Nedan ges Fouriertransformer av några funktioner på $\mathbb{R}$.

Funktion	Fouriertransform
$f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$
$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$	$g(\xi)$
$f(x-c)$	$\mathrm{e}^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\mathcal{F}f(\xi)$
$xf(x)$	$i(\mathcal{F}f)'(\xi)$
$f * g$	$(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$
$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$
$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2}{a}\mathrm{e}^{-a\lvert\xi\rvert}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$
$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$