MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2018-06-04, 8.30-12.30

MMGF30, Transformteori och analytiska funktioner

- **Examinator:** Magnus Goffeng, tel: 772 10 91, Email: goffeng@chalmers.se
- **Telefonvakt:** Jakob Hultgren, tel: 5325
- **Hjälpmedel:** Bifogat formelblad

Tentan har 5 frågor med totalt 100 poäng. Du har även kunnat få 10 bonuspoäng på inlämningarna innevarande läsår. Du behöver 50 poäng för godkänt (G) och 80 poäng för väl godkänt (VG) av dessa maximalt 110 poäng.

Fullständig poäng ges endast för fullständig lösning. Efterfrågas en sats måste tillbörliga antaganden göras. Påståenden utan förklaring eller rättfärdigande får få eller inga poäng. Används något från formelsamlingen måste detta anges. Ges ett tips på en fråga, så är det bara ett tips och får inte användas utan förklaring eller rättfärdigande. Flera av frågorna har flera delar, läs igenom dem noga innan du börjar så du inte missar någon del.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Tenta

Fråga 1 (a) Definiera logaritmen som en funktion av $z \in \mathbb{C}$. (5 poäng)

(b) Visa att logaritmen är analytisk utanför $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. (15 poäng)

Fråga 2 Låt D beteckna enhetsdisken $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Antag att $f : D \to \mathbb{C}$ är en analytisk funktion med $f(0) = 1$ och $f(z) \neq 0$ för alla $z \in D$. För $z \in D$ låter vi Γ_z beteckna linjen i D mellan 0 och z.

(a) Förklara varför $F(z) := \int_{\Gamma_z} \frac{f'(w)\mathrm{d}w}{f(w)}$ löser differentialekvationen $F' = \frac{f'}{f}$. (5 poäng)

(b) Visa att

$$\left(\frac{\mathrm{e}^F}{f}\right)' = \frac{(F'f - f')\mathrm{e}^F}{f^2}. \qquad \text{(5 poäng)}$$

(c) Använd a) och b) till att visa att F uppfyller att $\mathrm{e}^F = f$. (10 poäng)

Fråga 3 (a) Finn den inversa Laplacetransformen till $\frac{1}{z^2+1}$. (5 poäng)

(b) Använd a) och Laplacetransformen till att finna en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ som uppfyller att

$$\begin{cases} u'(t) + \int_0^t u(s)\mathrm{d}s = t, \ t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Ledning: Visa först att $u'(0) = 0$ och differentiera sedan ekvationen. (15 poäng)

Fråga 4 Låt $0 < a < 1$ vara ett tal och definiera den 2π-periodiska funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ enligt

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & a \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Visa att Fourierutvecklingen av f ges av

$$f \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{na} \cos(nx). \qquad \text{(13 poäng)}$$

(b) Använd Fourierutvecklingen av f till att visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$. (7 poäng)

Fråga 5 För $t > 0$ definierar vi funktionen $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enligt

$$f_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

(a) Formulera faltningssatsen för Fouriertransformen. För full poäng krävs fullständiga antaganden. (5 poäng)

(b) Visa att $\mathcal{F}f_t(\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2}$. (5 poäng)

(c) Visa att för $s, t > 0$ så är $f_t * f_s = f_{s+t}$. (10 poäng)

MG

Formelsamling

Trigonometriska identiteter

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A),$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A).$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Några Laplacetransformer

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	Definitionsmängd
1	$\frac{1}{z}$	$z > 0$
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$	$z > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$z > a$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$e^{at}cos(bt)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$t\cos(at)$	$\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$	$z > 0$
f P-periodisk	$\frac{\int_0^P f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-zP}}$	$z > 0$

Några Fourierserier

Nedan ges Fourierserierna av några funktioner på $[-\pi, \pi]$.

Funktion	Fourierserie
$f(x) = x$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$
$f(x) = F(\mathrm{e}^{ix})$ F analytisk nära enhetscirkeln	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx}$ med Laurentserie $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$
$f(x) = \lvert \sin(x) \rvert$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2-1}$
f P-periodisk funktion	$\sum_{n=-\infty^{\infty}} c_n \mathrm{e}^{2\pi inx/P}$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx/P) + b_n \sin(2n\pi x/P))$ $c_n := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx/P}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{Z}$ $a_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2\ldots$ $b_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 1, 2\ldots$

Några Fouriertransformer

Nedan ges Fouriertransformer av några funktioner på $\mathbb{R}$.

Funktion	Fouriertransform
$f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$
$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$	$g(\xi)$
$f(x-c)$	$\mathrm{e}^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\mathcal{F}f(\xi)$
$xf(x)$	$i(\mathcal{F}f)'(\xi)$
$f * g$	$(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$
$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$
$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2}{a}\mathrm{e}^{-a\lvert\xi\rvert}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$
$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$