MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2018-08-24, 14.00–18.00

MMGF30, Transformteori och analytiska funktioner

- **Examinator:** Magnus Goffeng, tel: 772 10 91, Email: goffeng@chalmers.se
- **Telefonvakt:** Ivar Simonsson, tel: 5325

- **Hjälpmedel:** Bifogat formelblad

Tentan har 5 frågor med totalt 100 poäng. Du har även kunnat få 10 bonuspoäng på inlämningarna innevarande läsår. Du behöver 50 poäng för godkänt (G) och 80 poäng för väl godkänt (VG) av dessa maximalt 110 poäng.

Fullständig poäng ges endast för fullständig lösning. Efterfrågas en sats måste tillbörliga antaganden göras. Påståenden utan förklaring eller rättfärdigande får få eller inga poäng. Används något från formelsamlingen måste detta anges. Ges ett tips på en fråga, så är det bara ett tips och får inte användas utan förklaring eller rättfärdigande. Flera av frågorna har flera delar, läs igenom dem noga innan du börjar så du inte missar någon del.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Tenta

Fråga 1 Vi betraktar funktionen

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

(a) Finn och klassificera alla singulariteter till f. (7 poäng)

(b) Laurentutveckla f kring $z = i$ i regionen $0 < |z - i| < 2$. (13 poäng)

Fråga 2 Vi betraktar funktionen

$$f(z) := \frac{1}{1+z^4}.$$

(a) Finn alla singulariteter till f i det övre halvplanet och räkna ut residyerna i dessa punkterna. (7 poäng)

(b) Räkna ut $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$. (13 poäng)

Fråga 3 (a) Visa att $-t + \sinh(t)$ är den inversa Laplacetransformen av $\frac{1}{z^2(z^2-1)}$. (10 poäng)

(b) Finn en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ som löser initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = t, \ t > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{(10 poäng).}$$

Fråga 4 (a) Med utgångspunkt i Fourierutvecklingen

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}, \quad x \in [0, 1],$$

lös värmeekvationen på intervallet $x \in [0, 1]$ och $t > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & \\ T(x, 0) = x, & x \in [0, 1] \\ T'_x(0, t) = T'_x(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

genom att ansätta $T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(n\pi x)$. (14 poäng)

(b) Beräkna $\lim_{t\to\infty} T(x, t)$. (6 poäng)

Fråga 5 Låt $g \in L^1(\mathbb{R})$ vara en kontinuerlig funktion med $\mathcal{F}g \in L^1(\mathbb{R})$. I denna uppgiften skall vi steg för steg beskriva ett lösningsförfarande för ekvationen i en okänd funktion $u = u(x,t)$ given av

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Vi betraktar funktionen $f = f(x,t)$ för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$ enligt

$$f(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

(a) Visa att f löser ekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \qquad \text{(5 poäng)}$$

(b) Sätt $f_t(x) := f(x,t)$ och $u(x,t) := (g * f_t)(x)$. Visa att u löser ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \text{(10 poäng)}$$

(c) Förklara hur identiteten $\mathcal{F}f_t(\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2}$ medför att $\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x)$ för $x \in \mathbb{R}$. (5 poäng)

MG

Formelsamling

Trigonometriska identiteter

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A),$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A).$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Några Laplacetransformer

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	Definitionsmängd
1	$\frac{1}{z}$	$z > 0$
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$	$z > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$z > a$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$e^{at} cos(bt)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$t\cos(at)$	$\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$	$z > 0$
f P-periodisk	$\frac{\int_0^P f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-zP}}$	$z > 0$

Några Fourierserier

Nedan ges Fourierserierna av några funktioner på $[-\pi, \pi]$.

Funktion	Fourierserie
$f(x) = x$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
$f(x) = \lvert x\rvert$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$
$f(x) = F(\mathrm{e}^{ix})$ F analytisk nära enhetscirkeln	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx}$ med Laurentserie $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$
$f(x) = \lvert\sin(x)\rvert$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2-1}$
f P-periodisk funktion	$\sum_{n=-\infty^{\infty}} c_n \mathrm{e}^{2\pi inx/P}$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx/P) + b_n \sin(2n\pi x/P))$ $c_n := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx/P}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{Z}$ $a_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2\ldots$ $b_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 1, 2\ldots$

Några Fouriertransformer

Nedan ges Fouriertransformer av några funktioner på $\mathbb{R}$.

Funktion	Fouriertransform
$f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$
$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$	$g(\xi)$
$f(x-c)$	$\mathrm{e}^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\mathcal{F}f(\xi)$
$xf(x)$	$i(\mathcal{F}f)'(\xi)$
$f * g$	$(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$
$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$
$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2}{a}\mathrm{e}^{-a\|\xi\|}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-a\|x\|}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$
$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$