MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2018-08-24, 14.00–18.00

MMGF30, Transformteori och analytiska funktioner

- **Examinator:** Magnus Goffeng, tel: 772 10 91, Email: goffeng@chalmers.se
- **Telefonvakt:** Ivar Simonsson, tel: 5325
- **Hjälpmedel:** Bifogat formelblad

Tentan har 5 frågor med totalt 100 poäng. Du har även kunnat få 10 bonuspoäng på inlämningarna innevarande läsår. Du behöver 50 poäng för godkänt (G) och 80 poäng för väl godkänt (VG) av dessa maximalt 110 poäng.

Fullständig poäng ges endast för fullständig lösning. Efterfrågas en sats måste tillbörliga antaganden göras. Påståenden utan förklaring eller rättfärdigande får få eller inga poäng. Används något från formelsamlingen måste detta anges. Ges ett tips på en fråga, så är det bara ett tips och får inte användas utan förklaring eller rättfärdigande. Flera av frågorna har flera delar, läs igenom dem noga innan du börjar så du inte missar någon del.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Tenta

Fråga 1 Vi betraktar funktionen

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

(a) Finn och klassificera alla singulariteter till f. (7 poäng)

(b) Laurentutveckla f kring $z = i$ i regionen $0 < |z - i| < 2$. (13 poäng)

Lösning. a) Funktionen f är analytisk närhelst $1 + z^2 \neq 0$. Det vill säga, f är analytisk närhelst $z \neq \pm i$. Punkterna i och $-i$ är singulariteter till f.

Vi skriver

$$f(z) = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z+i}.$$

Det följer att $(z+i)f(z)$ har en hävbar singularitet i $z = -i$ med $\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = i/2 \neq 0$, så f har en pol av ordning 1 i $-i$. På samma sätt har $(z-i)f(z)$ har en hävbar singularitet i $z = i$ med $\lim_{z\to i}(z+i)f(z) = -i/2 \neq 0$, så f har en pol av ordning 1 i i.

Lösning. b) Om vi skriver

$$f(z) = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}},$$

så kan vi utnyttja Taylorutvecklingen

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^k,$$

som konvergerar för $|w| < 1$. Vi får för $0 < |z - i| < 2$ att

$$f(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2i)^k}(z-i)^k = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2i)^{k+2}}(z-i)^k.$$

Fråga 2 Vi betraktar funktionen

$$f(z) := \frac{1}{1+z^4}.$$

(a) Finn alla singulariteter till f i det övre halvplanet och räkna ut residyerna i dessa punkterna. (7 poäng)

(b) Räkna ut $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$. (13 poäng)

Lösning. a) Funktionen f är analytisk närhelst $z^4+1 \neq 0$. Det vill säga, f är analytisk närhelst $z \neq \mathrm{e}^{\pi i/4 + k\pi i/2}$ för $k = 0, 1, 2, 3$. Punkterna $\mathrm{e}^{\pi i/4 + k\pi i/2}$, för $k = 0, 1, 2, 3$, är singulariteter till f. Det är endast $z_1 = \mathrm{e}^{\pi i/4}$ och $z_2 = \mathrm{e}^{3\pi i/4}$ som ligger i övre halvplanet.

Vi kan skriva $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ där $g(z) = z^4 + 1$. Då g endast har enkla nollställen, är alla singulariteter till f enkla poler. Vi har att

$$\mathrm{Res}_{z_j} f = \frac{1}{g'(z_j)} = \frac{1}{4z_j^3}, \quad j = 1, 2,$$

så

$$\mathrm{Res}_{z_1} f = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4\mathrm{e}^{3\pi i/4}} = -\frac{1}{4\mathrm{e}^{-\pi i/4}},$$

och

$$\mathrm{Res}_{z_2} f = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4\mathrm{e}^{9\pi i/4}} = \frac{1}{4\mathrm{e}^{\pi i/4}}.$$

Lösning. b) Enligt sats på föreläsning så gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z:\,\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}_z f,$$

eftersom f har ändligt många poler i övre halvplanet och uppfyller att $|f(z)| \le C(1+|z|^2)^{-1}$ för någon konstant C för stora nog $|z|$.

Om vi använder uträkningen i a), fås att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = 2\pi i(\mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_2} f) = 2\pi i\left(\frac{1}{4\mathrm{e}^{3\pi i/4}} + \frac{1}{4\mathrm{e}^{\pi i/4}}\right) = \frac{\pi}{2i}(\mathrm{e}^{\pi i/4} - \mathrm{e}^{-\pi i/4}) = \pi\sin(\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Fråga 3 (a) Visa att $-t + \sinh(t)$ är den inversa Laplacetransformen av $\frac{1}{z^2(z^2-1)}$. (10 poäng)

(b) Finn en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ som löser initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = t, \ t > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{(10 poäng).}$$

Lösning. a) Vi partialbråksuppdelar. Med utgångspunkt i nollställena till $z^2(z^2-1)$ gör vi ansatsen

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z-1} + \frac{d}{z+1},$$

för några tal a, b, c, d. Om vi förlänger till gemensamt bråk fås

$$\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z-1} + \frac{d}{z+1} = \frac{(a+c+d)z^3 + (b+c-d)z^2 - az - b}{z^2(z^2-1)}.$$

Det vill säga, ekvationen

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z-1} + \frac{d}{z+1},$$

är ekvivalent med att

$$\begin{cases} a+c+d=0 \\ b=d-c \\ a=0 \\ b=-1. \end{cases}$$

Vi bakåtsubstituerar $a=0$ och $b=-1$ vilket leder till $c=1/2$ och $d=-c=-1/2$. Vi sluter oss till att

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)} = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}.$$

Därför är

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2(z^2-1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{z^2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}\right) = -t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} = -t+\sinh(t).$$

Lösning. b) Vi Laplacetransformerar problemet

$$\begin{cases} u''(t)-u(t)=t,\ t>0, \\ u(0)=u'(0)=0, \end{cases}$$

till ekvationen

$$z^2\mathcal{L}(u)-\mathcal{L}(u)=\frac{1}{z^2}.$$

Vi får att

$$\mathcal{L}(u)=\frac{1}{z^2(z^2-1)}.$$

Enligt a) är

$$u(t)=-t+\sinh(t).$$

Fråga 4 (a) Med utgångspunkt i Fourierutvecklingen

$$x=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}, \quad x\in[0,1],$$

lös värmeekvationen på intervallet $x\in[0,1]$ och $t>0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & \\ T(x,0)=x, & x\in[0,1] \\ T'_x(0,t)=T'_x(1,t)=0, & t>0 \end{cases}$$

genom att ansätta $T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\cos(n\pi x)$. (14 poäng)

(b) Beräkna $\lim_{t\to\infty}T(x,t)$. (6 poäng)

Lösning. a) Vi ansätter $T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(n\pi x)$. Enligt ansatsen är

$$T(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\cos(n\pi x).$$

Initialvillkoret $T(x,0) = x$ ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\cos(n\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}.$$

Entydighet hos Fourierkoefficienter ger att

$$a_n(0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2}, & n > 0 \text{ udda}, \\ 0, & n > 0 \text{ jämn}. \end{cases}$$

Vi räknar ut att

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(n\pi x) \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2\pi^2 a_n(t)\cos(n\pi x).$$

Ekvationen $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ är ekvivalent med att

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n'(t) + n^2\pi^2 a_n(t))\cos(n\pi x) = 0.$$

Entydighet hos Fourierkoefficienter ger att a_n löser differentialekvationen

$$a_n'(t) = -n^2\pi^2 a_n(t), \quad t > 0.$$

Vi löser denna differentialekvation som

$$a_n(t) = a_n(0)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}, & n > 0 \text{ udda}, . \\ 0, & n > 0 \text{ jämn}. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis får vi att

$$T(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}.$$

Lösning. b) Enligt a) så är

$$T(x,t) - \frac{1}{2} = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}.$$

Vi skall visa att högerledet går exponentiellt fort mot noll, och att $T(x,t) \to 1/2$ då $t \to \infty$. Det vill säga, att T går mot nollte Fourierkoefficienten (=medelvärdet) av initialvärdet.

Vi räknar ut att

$$|T(x,t)-\frac{1}{2}| = \left|\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}\right| \le \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\frac{|\cos((2n-1)\pi x)|}{(2n-1)^2}.$$

Om $n>0$ så är $\mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \le \mathrm{e}^{-\pi^2 t}$. Vidare är $|\cos(z)| \le 1$ för alla reella z, så

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\frac{|\cos((2n-1)\pi x)|}{(2n-1)^2} \le \mathrm{e}^{-\pi^2 t}\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = C\mathrm{e}^{-\pi^2 t},$$

där $C := \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} < \infty$. Med andra ord är

$$|T(x,t)-1/2| \le C\mathrm{e}^{-\pi^2 t}.$$

Det följer att $T(x,t) \to 1/2$ då $t \to \infty$.

Fråga 5 Låt $g \in L^1(\mathbb{R})$ vara en kontinuerlig funktion med $\mathcal{F}g \in L^1(\mathbb{R})$. I denna uppgiften skall vi steg för steg beskriva ett lösningsförfarande för ekvationen i en okänd funktion $u = u(x,t)$ given av

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Vi betraktar funktionen $f = f(x,t)$ för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$ enligt

$$f(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

(a) Visa att f löser ekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \qquad \text{(5 poäng)}$$

(b) Sätt $f_t(x) := f(x,t)$ och $u(x,t) := (g * f_t)(x)$. Visa att u löser ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \text{(10 poäng)}$$

(c) Förklara hur identiteten $\mathcal{F}f_t(\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2}$ medför att $\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x)$ för $x \in \mathbb{R}$. (5 poäng)

Lösning. a) Vi räknar ut att

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{t^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{t^{5/2}}\right)\mathrm{e}^{-x^2/4t},$$

och att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{x}{t^{3/2}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{t^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{t^{5/2}}\right)\mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

Det följer att $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Lösning. b) Enligt sats på föreläsningarna gäller att $\frac{\partial}{\partial x}(g_1 * g_2) = g_1 * \frac{\partial g_2}{\partial x}$ närhelst $g_1, g_2, \frac{\partial g_2}{\partial x} \in L^1(\mathbb{R})$. Därför är

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g * \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Vi kan räkna ut att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y,t) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y,t) \mathrm{d}y = g * \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Eftersom $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, så är

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g * \frac{\partial f}{\partial t} = g * \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Lösning. c) Låt $U = U(\xi, t)$ beteckna Fouriertransformen av u i x-riktningen. Enligt faltningssatsen är

$$U(\xi, t) = \mathcal{F} f_t(\xi) \mathcal{F} g(\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2} \mathcal{F} g(\xi).$$

Det följer att $\lim_{t \to 0} U(\xi, t) = U(\xi, 0) = \mathcal{F} g(\xi)$. Inversionssatsen för Fouriertransformen ger att $\lim_{t \to 0} u(x,t) = g(x)$.

MG

Formelsamling

Trigonometriska identiteter

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A),$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A).$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Några Laplacetransformer

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(z)$	Definitionsmängd
1	$\frac{1}{z}$	$z > 0$
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$	$z > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$	$z > a$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$	$z > a$
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$	$z > 0$
$e^{at} cos(bt)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(z-a)^2+b^2}$	$z > a$
$t\cos(at)$	$\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$	$z > 0$
f P-periodisk	$\frac{\int_0^P f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-zP}}$	$z > 0$

Några Fourierserier

Nedan ges Fourierserierna av några funktioner på $[-\pi, \pi]$.

Funktion	Fourierserie
$f(x) = x$	$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
$f(x) = \|x\|$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$
$f(x) = F(\mathrm{e}^{ix})$ F analytisk nära enhetscirkeln	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx}$ med Laurentserie $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$
$f(x) = \|\sin(x)\|$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2-1}$
f P-periodisk funktion	$\sum_{n=-\infty\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi inx/P}$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx/P) + b_n \sin(2n\pi x/P))$ $c_n := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx/P}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{Z}$ $a_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2\ldots$ $b_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin(2\pi nx/P)\mathrm{d}x,\ n = 1, 2\ldots$

Några Fouriertransformer

Nedan ges Fouriertransformer av några funktioner på $\mathbb{R}$.

Funktion	Fouriertransform
$f(x)$	$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$
$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$	$g(\xi)$
$f(x-c)$	$\mathrm{e}^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\mathcal{F}f(\xi)$
$xf(x)$	$i(\mathcal{F}f)'(\xi)$
$f * g$	$(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$
$f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$
$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2}{a}\mathrm{e}^{-a\|\xi\|}$
$f(x) = \mathrm{e}^{-a\|x\|}$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$
$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$	$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$