MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2019-03-22, 8.30–12.30

# MMGF30, Transformteori och analytiska funktioner

- **Examinator:** Magnus Goffeng, tel: 1091, Email: goffeng@chalmers.se
- **Telefonvakt:** Olof Giselsson, tel: 5325
- **Hjälpmedel:** Bifogat formelblad

---

Tentan har 6 frågor med totalt 30 poäng. Du har även kunnat få 18 bonuspoäng på inlämningarna innevarande läsår och de ger ett tillägg med en faktor 1/6 till tentapoängen. För godkänt (G) behöver du få ett heltaligt poäng på 5/6 uppgifter och 15 poäng totalt på tentan. För väl godkänt (VG) behöver du utöver godkäntgränsen ha mer än 22 poäng på tentan.

Fullständig poäng ges endast för fullständig lösning. Efterfrågas en sats måste tillbörliga antaganden göras. Påståenden utan förklaring eller rättfärdigande får få eller inga poäng. Används något från formelsamlingen måste detta anges. Ges ett tips på en fråga, så är det bara ett tips och får inte användas utan förklaring eller rättfärdigande. Flera av frågorna har flera delar, läs igenom dem noga innan du börjar så du inte missar någon del.

---

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

## Tenta

**Fråga 1** Formulera Cauchys sats och räkna ut kurvintegralen $\int_3^{1+i} z^3 \mathrm{d}z$. Förklara varför denna integral inte beror på kurvan. (5 poäng)

**Lösning.** För Cauchys sats, se Sats 2.3.6 i föreläsningsanteckningarna. För att räkna ut integralen ser vi att $F(z) := \frac{z^4}{4}$ uppfyller $F'(z) := z^3$ för alla $z \in \mathbb{C}$. I andra ord är $F$ en komplex antiderivata till $z^3$ i $\mathbb{C}$. Därför är

$$\int_3^{1+i} z^3 \mathrm{d}z = F(1+i) - F(3) = (1+i)^4/4 - 3^4/4 = (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi i/4})^4/4 - 81/4 = -85/4.$$

Integralen beror inte på kurvan eftersom för två val av kurvor $\Gamma$ och $\Gamma'$ från 3 till $1+i$, så ger Cauchys sats att

$$\int_\Gamma z^3 \mathrm{d}z - \int_{\Gamma'} z^3 \mathrm{d}z = \int_{\Gamma - \Gamma'} z^3 \mathrm{d}z = 0,$$

då $\Gamma - \Gamma'$ är en sluten kurva.

**Fråga 2** Formulera Taylors sats och Taylorutveckla funktionen

$$f(z) := \frac{2}{z^2 + 2z + 2},$$

kring punkten $z_0 = -1$. (5 poäng)

**Lösning.** För Taylors sats, se Sats 2.5.2 i föreläsningsanteckningarna. För att Taylorutveckla den angivna funktionen, notera först att

$$\frac{2}{z^2+2z+2} = \frac{2}{(z+1)^2+1}$$

Vi kan använda Taylorutvecklingen kring $w = 0$

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1,$$

till att skriva

$$\frac{2}{(z+1)^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n (z+1)^{2n}, \quad |z+1| < 1.$$

Eftersom detta är en absolutkonvergent Taylorserie kring $z = -1$ och överensstämmer med funktionen $\frac{2}{z^2+2z+2}$ i en omgivning av $z = -1$ så är det dess Taylorutveckling på grund av entydigheten hos Taylorutvecklingar.

**Fråga 3** Formulera Cauchys residysats och beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi x}}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x,$$

där $\xi > 0$ är en parameter. (5 poäng)

**Lösning.** För Cauchys residysats, se Sats 3.7.11 i föreläsningsanteckningarna. Integraluträkningen kan göras på två sätt: med Fouriertransform eller med residyräkning.

**Integraluträkning med Fouriertransform.** Vi gör variabelbytet $y = x + 1$ i integralen och får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi x}}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi y - i\xi}}{y^2+1} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-i\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi y}}{y^2+1} \mathrm{d}y.$$

Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi y}}{y^2+1} \mathrm{d}y$ är Fouriertransformen av funktionen $y \mapsto \frac{1}{y^2+1}$ som enligt formelsamlingen nedan ges av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi y}}{y^2+1} \mathrm{d}y = \pi \mathrm{e}^{-|\xi|}.$$

Vi får därför för $\xi > 0$ att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi x}}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-i\xi} \pi \mathrm{e}^{-|\xi|} = \pi \mathrm{e}^{-\xi} (\cos(\xi) - i \sin(\xi)).$$

**Integraluträkning med residykalkyl.** För att räkna ut integralen, skriver vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi x}}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \left( \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} \mathrm{d}z - \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} \mathrm{d}z \right),$$

där $\Gamma_R^0$ är den moturs orienterade halvcirkeln i det övre halvplanet centrerad i origo och $\Gamma_R = [-R, R] + \Gamma_R^0$. Eftersom $\xi > 0$, så gäller för stora $|z|$ med $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ att

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} \right| \leq C|z|^{-2}.$$

Därför är

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} \mathrm{d}z = 0,$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi x}}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} \mathrm{d}z.$$

Vi räknar ut den senare integralen med Cauchys residysats. Integranden $\frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1}$ är analytisk i övre halvplanet utom i punkten $z = -1 + i$ där integranden har en enkel pol. Vi kan faktorisera

$$(z+1)^2 + 1 = (z + 1 - i)(z + 1 + i).$$

Vi räknar ut residyn där till att vara

$$\mathrm{Res}_{z=-1+i} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} = \lim_{z \to -1+i} (z + 1 - i) \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} = \lim_{z \to -1+i} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{z+1+i} =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{(-1-i)\xi}}{i} = \frac{1}{2i} \mathrm{e}^{-i\xi - \xi}.$$

Cauchys residysats ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\xi x}}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1}\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1+i}\frac{\mathrm{e}^{i\xi z}}{(z+1)^2+1} =$$
$$= 2\pi i \frac{1}{2i}\mathrm{e}^{-i\xi-\xi} = \pi\mathrm{e}^{-\xi}(\cos(\xi) - i\sin(\xi)).$$

**Fråga 4** Formulera Parsevals sats och beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ utifrån Fourierserierna i formelsamlingen nedan. (5 poäng)

**Lösning.** För Parsevals sats, se Korollarium 5.3.13 i föreläsningsanteckningarna. För att räkna ut serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$, använder vi Fourierserien från formelsamlingen:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Enligt Parsevals sats är

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} \tag{1}$$

Vi räknar ut att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3\pi}[x^3]_{x=0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Vi kan lösa ut serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ ur ekvationen (1) och få

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

**Fråga 5** (a) Beräkna valfri Laplacetransform från formelsamlingen nedan. (2 poäng)

(b) Lös systemet av initialvärdesproblem

$$\begin{cases} u' + v = 0, \\ v' + u = \sin(t), \\ u(0) = v(0) = 0. \end{cases}$$

(3 poäng)

**Lösning. a)** Se kapitel 4 i föreläsningsanteckningarna.

**Lösning. b)** Om vi löser ut $v$ ur första ekvationen får vi $v = -u'$ så andra ekvationen kan formuleras som intitialvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' + u = \sin(t), \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Laplacetransformering ger att Laplacetransformen $\mathcal{L}u$ måste uppfylla

$$\mathcal{L}u(z) = \frac{1}{-z^2+1}\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2-1}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\sin - \frac{1}{2}\sinh\right)(z).$$

Vi ser att $u(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\sinh(t)$ ger en lösning till initialvärdesproblemet (2) ($u(0) = 0-0 = 0$ och $u'(0) = \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\cosh(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$). Därför löses initialvärdesproblemet i uppgiften med hjälp av $v = -u'$ och ges av

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\sinh(t), \\ v(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cosh(t). \end{cases}$$

**Fråga 6** Formulera faltningssatsen för Fouriertransformen[1] och visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{x^2+4}.$$

(5 poäng)

**Lösning.** För faltningssatsen för Fouriertransformen, se Proposition 6.2.4 i föreläsningsanteckningarna. För att räkna ut integralen, definierar vi funktionen $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$ och noterar att vänsterledet är $f * f(x)$. Enligt formelsamlingen nedan är $\mathcal{F}f(\xi) = \pi \mathrm{e}^{-|\xi|}$. Faltningssatsen ger att $\mathcal{F}(f*f)(\xi) = \pi^2\mathrm{e}^{-2|\xi|}$. För $g(x) = \frac{2\pi}{x^2+4}$ ger formelsamlingen nedan att

$$\mathcal{F}g(\xi) = \pi^2\mathrm{e}^{-2|\xi|} = \mathcal{F}(f*f)(\xi).$$

Inversionssatsen för Fouriertransformen ger att $f*f(x) = g(x)$ för alla $x$ vilket visar att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2+1}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = f*f(x) = g(x) = \frac{2\pi}{x^2+4}.$$

MG

[1] Glöm inte att formulera lämpliga antaganden på de inblandade funktionerna.

# Formelsamling

## Trigonometriska identiteter

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A),$$
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A).$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)),$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B)).$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

## Några Laplacetransformer

| $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)(z)$ | Definitionsmängd |
|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{z}$ | $z > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{z-a}$ | $z > a$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$ | $z > a$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{z}{z^2-a^2}$ | $z > a$ |
| $\sinh(at)$ | $\frac{a}{z^2-a^2}$ | $z > a$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{z}{z^2+a^2}$ | $z > 0$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{z^2+a^2}$ | $z > 0$ |
| $e^{at} cos(bt)$ | $\frac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$ | $z > a$ |
| $e^{at}\sin(bt)$ | $\frac{b}{(z-a)^2+b^2}$ | $z > a$ |
| $t\cos(at)$ | $\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2}$ | $z > 0$ |
| $f$<br>$P$-periodisk | $\frac{\int_0^P f(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-zP}}$ | $z > 0$ |

## Några Fourierserier

Nedan ges Fourierserierna av några funktioner på $[-\pi, \pi]$.

| Funktion | Fourierserie |
|---|---|
| $f(x) = x$ | $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ |
| $f(x) = \|x\|$ | $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$ |
| $f(x) = F(\mathrm{e}^{ix})$<br>$F$ analytisk nära enhetscirkeln | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx}$<br>med Laurentserie $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ |
| $f(x) = \|\sin(x)\|$ | $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2-1}$ |
| $f$<br><br>$P$-periodisk funktion | $\sum_{n=-\infty\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi inx/P}$<br>$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx/P) + b_n \sin(2n\pi x/P))$<br>$c_n := \frac{1}{P}\int_0^P f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx/P}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{Z}$<br>$a_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\cos(2\pi nx/P)\mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2\ldots$<br>$b_n := \frac{2}{P}\int_0^P f(x)\sin(2\pi nx/P)\mathrm{d}x$, $n = 1, 2\ldots$ |

## Några Fouriertransformer

Nedan ges Fouriertransformer av några funktioner på $\mathbb{R}$.

| Funktion | Fouriertransform |
|---|---|
| $f(x)$ | $\mathcal{F}f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$ |
| $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$ | $g(\xi)$ |
| $f(x-c)$ | $\mathrm{e}^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$ |
| $f'(x)$ | $i\xi\mathcal{F}f(\xi)$ |
| $xf(x)$ | $i(\mathcal{F}f)'(\xi)$ |
| $f * g$ | $(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$ | $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4a}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$ | $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a\lvert\xi\rvert}$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}$, $a > 0$ | $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$ |
| $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$ | $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$ |