Matematiska institutionen
Göteborgs universitet och
Chalmers tekniska högskola
Version 2005

Vektoralgebra

En inledning

Hasse Carlsson (ursprungligen H. Carlsson men modifierad för att passa MMGK11)

Innehåll

1. Inledning

Du är säkert väl förtrogen med hur (reella) tal kan användas för att beskriva olika storheter inom naturvetenskap, t.ex. längd, temperatur, strömstyrka och fart. Dessa storheter kallas ofta för skalärer.

Andra storheter har både riktning och storlek. Några sådana exempel är kraft, acceleration, hastighet och magnetfält. Sedan länge har man beskrivit dessa storheter, t.ex. krafter, med hjälp av pilar (riktade sträckor) där pilen pekar i kraftens riktning och pilens längd anger kraftens storlek. Storheter med både riktning och storlek kallas vektorer. Vi skall lära oss att räkna med dessa vektorer och på så sätt skapa oss ett verktyg för att angripa problem av många olika slag.

Syftet med detta kompendium är att på ett förhoppningsvis begripligt sätt beskriva början av denna teori.

2. Geometriska vektorer

Med ledning av diskussionen i inledningen skall vi definiera vektorer och operationer på vektorer i både planet och rummet. Definitionen bygger på geometriska resultat om t.ex. parallellitet och likformighet. Omvänt kan vi därför genom att räkna med vektorer bevisa geometriska resultat.

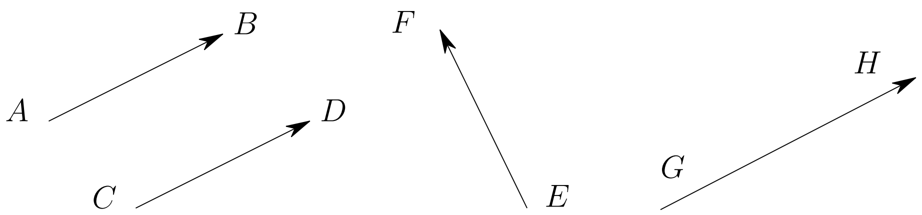
Om man studerar hastigheten hos en båt (i synnerhet om vågorna är små) är det naturligt att bara hålla reda på hur den rör sig med avsende på två riktningar; nord-sydlig och öst-västlig. En båt kan t.ex. köra med 12 knop i nordnordvästlig riktning. Om man i stället studerar ett flygplan behöver man också hålla reda på en tredje riktning; nämligen den vertikala. Planet kan stiga $30°$ med hastigheten $572\,\mathrm{km/tim}$ i sydostlig riktning. Man säger därför att planet (inte flygplanet) är tvådimensionellt och rummet tredimensionellt och vi använder ofta beteckningarna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ för planet respektive rummet.

2.1. Definition av vektorer

Vi skall definiera vektorer i planet och i rummet. Diskussionen i denna och de följande två paragraferna gäller både för vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Definition 2.1. *Två punkter A och B bestämmer en* riktad sträcka *från A till B som betecknas $\overrightarrow{AB}$.*

Varje riktad sträcka bestämmer i sin tur en vektor $\mathbf{u}$. *Två sträckor som är lika långa och lika riktade bestämmer samma vektor.*



I figuren är sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ lika långa och lika riktade och bestämmer alltså samma vektor $\mathbf{u}$. Vi skriver $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sträckan $\overrightarrow{EF}$ är lika lång som $\overrightarrow{AB}$ men inte parallell med $\overrightarrow{AB}$. Så om $\mathbf{v} = \overrightarrow{EF}$ är $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sträckan $\overrightarrow{GH}$ är lika riktad men inte lika lång som $\overrightarrow{AB}$, så om $\mathbf{w} = \overrightarrow{GH}$ är $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$. Eftersom $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ varken är lika långa eller lika riktade så är också $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\mathbf{0}$ och alltså är $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

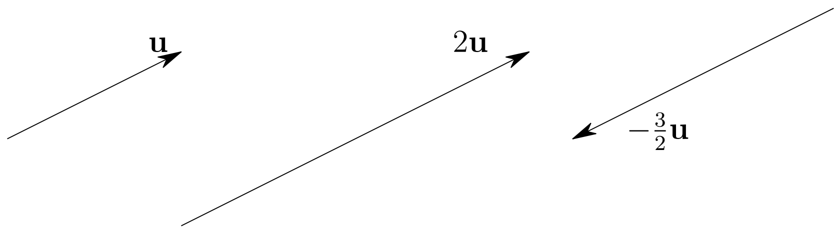
Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u}$ den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$, dvs. $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$.

Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $|\mathbf{u}|$.

2.2. Operationer på vektorer

Multiplikation av en vektor med en skalär

Definition 2.2. *Om t är ett reellt tal och $\mathbf{u}$ är en vektor så är $t\mathbf{u}$ den vektor som har längden $|t||\mathbf{u}|$ och är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*



Exempel 2.1.
(1) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (2) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$
(3) $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla t och (4) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$.

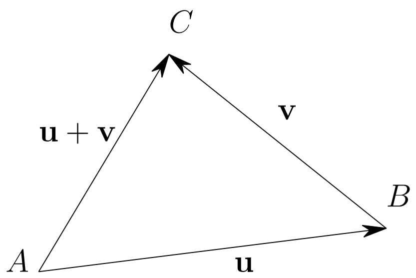
□

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $t\,\mathbf{u}$ är alltså parallella och om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ för något t.

Addition av vektorer

Vi skall nu definiera addition av vektorer. Definitionen görs så att kraftparallellogramlagen blir uppfylld.

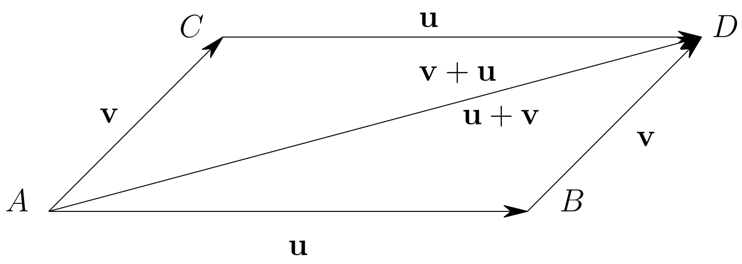
Definition 2.3. *Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.*



Räkneregler

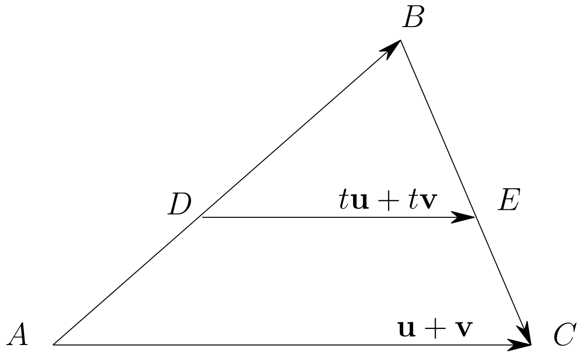
(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (*associativitet*),
(3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
(4) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (*distributivitet*),
(5) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$ (*distributivitet*),
(6) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

Vi visar bara (1) och (4) då $t > 0$, och låter läsaren själv fundera ut varför de övriga är sanna.
Kommutativiteten följer ur följande figur.



I parallellogrammen $ABCD$ är $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Så $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$.

Att (4) gäller följer av likformighet. Antag att $t > 0$ och betrakta trianglarna ABC och DBE där $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, $t\mathbf{u} = \overrightarrow{DB}$ och $t\mathbf{v} = \overrightarrow{BE}$.



Trianglarna ABC och DBE är likformiga med förhållandet $1 : t$. (Varför?) Så $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DE}$ är lika riktade och $|\overrightarrow{DE}| = t\,|\overrightarrow{AC}|$. Det betyder att $\overrightarrow{DE} = t\,\overrightarrow{AC}$ och

$$t(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = t\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}\ .$$

$\square$

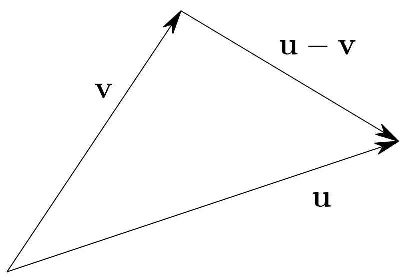
Anmärkning 2.1. Figuren i beviset av (1) visar att addition av vektorer uppfyller parallellogramlagen för krafter. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är krafter så är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ krafternas resultant; om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ påverkar en partikel så blir effekten densamma som när partikeln bara påverkas av kraften $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. $\square$

Subtraktion av vektorer

Definition 2.4. $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$.

Vi har $\mathbf{u}-\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ty om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ och $\mathbf{u}-\mathbf{u} = \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

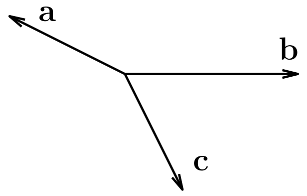
Observera också att $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ löser ekvationen $\mathbf{v}+\mathbf{x} = \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{v}+(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{v}-\mathbf{v})+\mathbf{u} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Så om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de startar i samma punkt är $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ den vektor som startar i spetsen av $\mathbf{v}$ och slutar i spetsen av $\mathbf{u}$.



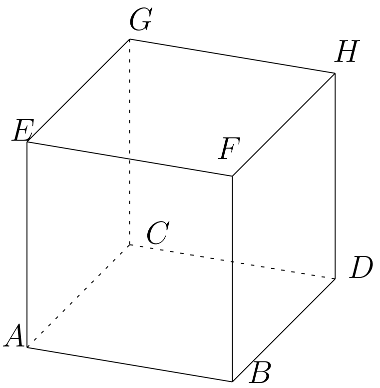
Man kan också se det genom att skriva $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Anmärkning 2.2. Figurerna i bevisen ovan är ritade tvådimensionellt. (I papperets plan). Detta är ingen inskränkning eftersom två vektorer alltid ligger i ett plan. Däremot gör inte alltid tre vektorer det, så associativa lagen kan inte åskadliggöras med en tvådimensionell figur. □

Övning 2.1. Bestäm (a) $\mathbf{2a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ och (c) $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
där $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ges av figuren:



Övning 2.2. Låt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ i följande kub.



Bestäm tal x, y och z så att $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ då

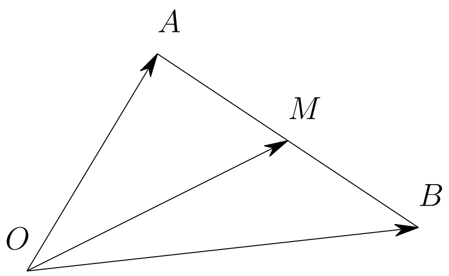
(a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{EH}$, (c) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG}$,

(d) $\mathbf{v} = \overrightarrow{HA}$, och (e) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HA}$.

Övning 2.3. En motorbåt går i stillastående vatten med farten 6 m/s. Båten körs i en älv där vattnet strömmar rakt söderut med farten 2 m/s.
(a) Bestäm båtens hastighet (storlek och fart) om den styrs i rakt östlig riktning.
(b) Vilken kurs skall båten hålla för att röra sig rakt öster ut?

Exempel 2.2. Låt O, A och B vara tre punkter. Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$ så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$



Eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

□

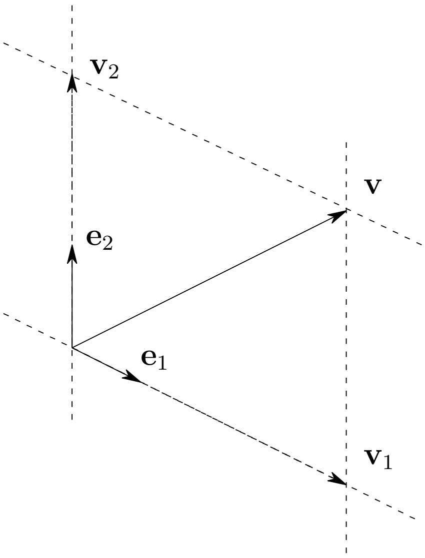
3. Baser och koordinater

För att göra det mer praktiskt att räkna med geometriska vektorer i planet och rummet skall vi se hur man kan representera dem som par respektive tripplar av reella tal. På så sätt kan man räkna med vektorer ”som vanligt” fast med två respektive tre kopior av $\mathbb{R}$.

3.1. Baser i planet

Definition 3.1. *Två vektorer i planet $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ som inte är parallella kallas en* bas.

Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Placera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}$ så att de börjar i samma punkt. Drag linjer genom $\mathbf{v}$:s ändpunkter parallella med $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ och låt $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ vara sidorna i den parallellogram som bildas.



Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$. Eftersom $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är parallella med $\mathbf{e}_1$ respektive $\mathbf{e}_2$ finns tal x och y så att $\mathbf{v_1} = x\,\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{v_2} = y\,\mathbf{e}_2$. Alltså är $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och vi har visat ena halvan av följande sats.

Sats 3.2. *Om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är en bas i planet så kan varje vektor $\mathbf{v}$ entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2.$$

(Talen x och y kallas för $\mathbf{v}$:s koordinater *i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.)*

Det återstår att visa entydigheten. Så antag att $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2$. Vi måste visa att $x = x'$ och $y = y'$. Men om t.ex $x \neq x'$ så är $\mathbf{e}_1 = -\dfrac{y-y'}{x-x'}\,\mathbf{e}_2$, dvs. $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är parallella. Men detta är en motsägelse eftersom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ är en bas, så $x = x'$. ■

Anmärkning 3.1. I resonemanget ovan har vi implicit antagit att varken $\mathbf{e}_1$ eller $\mathbf{e}_2$ är nollvektorn. För att inte behöva behandla nollvektorn speciellt använder vi i fortsättningen konventionen att $\mathbf{0}$ är parallell med (och vinkelrät mot) varje vektor. □

Om basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är vinkelräta (eller *ortogonala*) och har längden ett kallas de *ortonormerade*. I fortsättningen arbetar vi oftast med ortonormerade basvektorer.

Om det är klart vilka basvektorerna är, skriver vi helt kort $\mathbf{v} = (x, y)$ i stället för $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och kallar x och y för $\mathbf{v}$:s koordinater. Om $(x, y) = (x', y')$ så ger entydigheten i Sats 3.2 att $x = x'$ och $y = y'$.

Sats 3.3. *Om* $\mathbf{v} = (x, y)$, $\mathbf{u} = (x', y')$ *och* $t \in \mathbb{R}$ *så gäller*

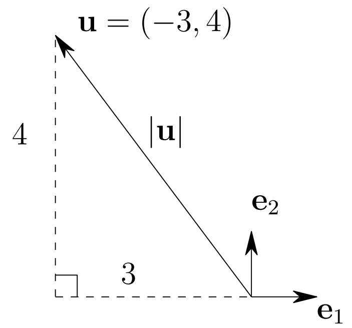
$$t\,\mathbf{v} = t\,(x, y) = (tx, ty)$$

och

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Bevis. Satsen följer enkelt från räknereglerna för vektorer. Vi har $t\,\mathbf{v} = t(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) = tx\,\mathbf{e}_1 + ty\,\mathbf{e}_2 = (tx, ty)$ och $\mathbf{v} + \mathbf{u} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 = (x + x')\,\mathbf{e}_1 + (y + y')\,\mathbf{e}_2 = (x + x', y + y')$. ■

Exempel 3.1. Antag att $\mathbf{u} = (-3, 4)$ i en ortonormerad bas. Hur lång är $\mathbf{u}$?



Lösning. Pythagoras sats ger (se figuren) $|\mathbf{u}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ så $|\mathbf{u}| = 5$.

Med samma resonomang ser vi att om $\mathbf{u} = (x, y)$ så är

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

□

Exempel 3.2. Krafterna $\mathbf{F_1} = (-1, 2)$ och $\mathbf{F_2} = (2, -3)$ (i Newton) verkar på en partikel. Hur stor är deras sammanlagda verkan?
Lösning. Den resulterande kraften är $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = (-1, 2) + (2, -3) = (1, -1)$ så $|\mathbf{F}| = \sqrt{1 + 1}\,N=\sqrt{2}\,$N. □

Övning 3.1. Antag att $\mathbf{u} = (1, 2)$ och att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 4)$. Vad är då $\mathbf{v}$?

Övning 3.2. Antag att $\overrightarrow{AB}= (2, 1)$, $\overrightarrow{AC}= (3, 2)$. Bestäm $\overrightarrow{BC}$.

Övning 3.3. Sätt $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1)$. Visa att $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.

Övning 3.4. Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ha koordinaterna $(1, 2)$ respektive $(1, 1)$ i en given bas. Visa att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ också är en bas i planet. Vilka är de nya koordinaterna för den vektor som har de gamla koordinaterna $(2, 1)$?

3.2. Baser i $\mathbb{R}^3$

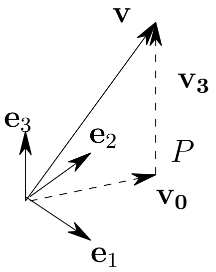
Definition 3.4. *Tre vektorer* $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *utgör en* bas *för* $\mathbb{R}^3$ *om de inte ligger i ett plan.*

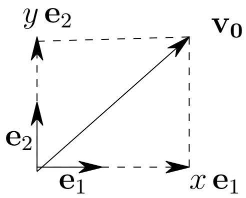
Sats 3.5. *Om* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *är en bas i rummet kan varje vektor* $\mathbf{v}$ *entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3\ .$$

Bevis. Placera $\mathbf{v}$ och basvektorerna så att de börjar i samma punkt. Drag en linje parallell med $\mathbf{e}_3$ som går genom spetsen på $\mathbf{v}$. Den skär planet som innehåller $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ i en punkt P. (Linjen skär planet eftersom $\mathbf{e}_3$

inte ligger i planet.) Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_3}$, se figuren. $\mathbf{v_3}$ är parallell med $\mathbf{e}_3$, så $\mathbf{v_3} = z\,\mathbf{e}_3$.





$\mathbf{v_0}$ ligger i planet som spänns av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Observera att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella. (Varför?) Med hjälp av Sats 3.1 ser vi att $\mathbf{v_0} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och alltså $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_3} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$, och existensen är klar.

För att visa entydigheten antar vi att

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 + z'\,\mathbf{e}_3\ .$$

Vi måste visa att $x = x'$, $y = y'$ och $z = z'$. Antag tex. att $z \neq z'$. Då gäller

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{x - x'}{z - z'}\,\mathbf{e}_1 - \frac{y - y'}{z - z'}\,\mathbf{e}_2\ ,$$

vilket betyder att $\mathbf{e}_3$ ligger i samma plan som $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Detta motsäger att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en bas, och alltså är $z = z'$.

■

Som i $\mathbb{R}^2$ skriver vi kortfattat $\mathbf{v} = (x, y, z)$ och vi har räknereglerna

$$t\,(x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{och} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')\ .$$

En bas är *ortonormerad* om alla basvektorerna har längden ett och är vinkelräta mot varandra. Med hjälp av Pythagoras sats ser vi (Hur då?) att i en ortonormerad bas ges en vektors längd av

$$|\mathbf{u}|^2 = |(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

.

Övning 3.5. Bestäm $\overrightarrow{BC}$ om $\overrightarrow{AB}= (1, 2, 1)$ och $\overrightarrow{AC}= (2, 1, 3)$.

Övning 3.6. Sätt $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$. Beräkna $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Övning 3.7. Bestäm ett tal a så att vektorerna $(a, 2 + a, 6)$ och $(2, 1, -3)$ är parallella.

Övning 3.8. Bestäm ett tal t så att vektorerna
(a) $(1, 2)$ och (t, t^2), (b) $(t, 1 - t, 1 + t)$ och $(2, 0, 4)$
och (c) $(t, 2t^2, 3t)$ och $(1, 6, t)$
blir parallella.

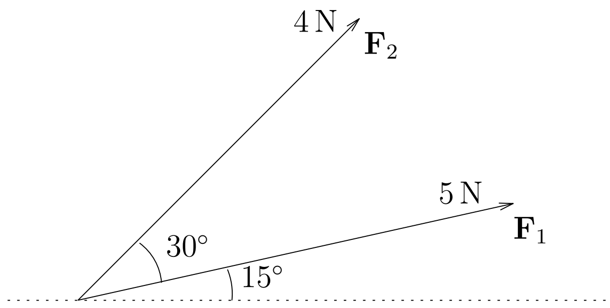
Övning 3.9. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som har längden 1 och är parallell med $(-1, 2, 2)$.

Övning 3.10. Bestäm längderna av vektorerna
(a) $(-1, -2, -3)$, (b) $(1, 1, 1)$ och (c) $(-1, 2, 2)$.

Övning 3.11. Krafterna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ verkar på en partikel. Bestäm storlek och riktning av krafternas resultant om

(a) $\mathbf{F}_1 = (1, -3, 4)$ och $\mathbf{F}_2 = (5, 9, 2)$,

(b) ges av följande figur:

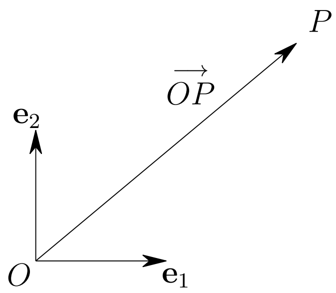


(ON-bas, SI-enheter.)

Övning 3.12. Bildar vektorerna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ en bas för $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar.

3.3. Koordinatsystem

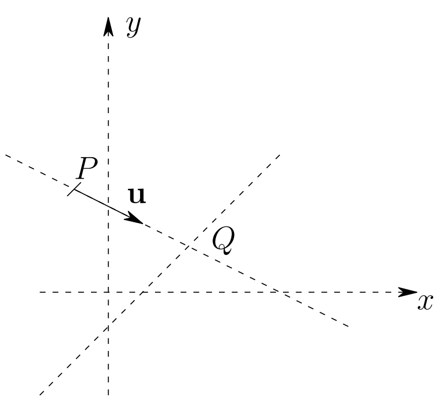
I det här avsnittet skall vi beskriva punkter med hjälp av koordinater. Detta gör vi genom att fixera en punkt O som vi kallar *origo*. En punkt P bestämmer en vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ och omvänt om vi har en vektor $\mathbf{u}$ så finns det en punkt P så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$. Vektorn $\overrightarrow{OP}$ kallas för P:s ortsvektor.



Vi har alltså identifierat punkten P med vektorn $\overrightarrow{OP}$. Om $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ (i en viss bas) får P samma koordinater; $P = (x, y, z)$. För origo gäller $O = (0, 0, 0)$. (Varför?)

Exempel 3.3. Bestäm koordinaterna för den vektor $\overrightarrow{PQ}$ som går från $P = (1, -2, 1)$ till $Q = (-2, 1, 0)$.
Lösning. Vi har $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$. Så $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P = (-2, 1, 0) - (1, -2, 1) = (-3, 3, -1)$. □

Exempel 3.4. Genom punkten $P = (-1, 3)$ dras en linje parallell med vektorn $\mathbf{u} = (2, -1)$. Var skär denna linjen $x - y = 1$?
Lösning. Kalla skärningspunkten Q.



Eftersom $\overrightarrow{PQ}$ är parallell med $\mathbf{u}$ finns ett tal t med $\overrightarrow{PQ}= t\,\mathbf{u}$ eller $Q = P + t\,\mathbf{u} = (-1,3) + t(2,-1) = (2t-1, 3-t)$. Men att Q ligger på linjen $x-y = 1$ betyder att $2t-1-(3-t) = 1$. Denna ekvation har lösningen (Räkna själv!) $t = 5/3$. Alltså är $Q = (-1,3) + \dfrac{5}{3}(2,-1) = \dfrac{1}{3}(7,4)$. □

Vi har alltså sett att två punkter P och Q bestämmer en vektor $\overrightarrow{PQ}$ som beräknas genom

$$\overrightarrow{PQ}= Q - P\,.$$

Ett annat sätt att skriva detta är

$$P+ \overrightarrow{PQ}= Q\,;$$

om vi startar i punkten P och går längs vektorn $\overrightarrow{PQ}$ hamnar vi i Q.

Övning 3.13. Antag att $\overrightarrow{OP}= (2,3)$, $\overrightarrow{OQ}= (3,4)$. För vilken punkt R gäller det att $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$?

Övning 3.14. En triangel har hörn i $A = (1,2,3)$, $B = (3,5,7)$ och $C = (2,-9,-5)$. Bestäm vektorerna $\mathbf{u} =\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} =\overrightarrow{BC}$ och $\mathbf{w} =\overrightarrow{CA}$.

Övning 3.15. Vad är mittpunkten på sträckan vars ändpunkter är
(a) $(1,2,3)$ och $(3,0,-1)$, (b) (x,y,z) och (x_1,y_1,z_1) ?

Övning 3.16. Bestäm mittpunkten på sträckan mellan de båda punkterna $(1,2,3)$ och $(4,4,4)$.

Övning 3.17. Bestäm avståndet mellan följande par av punkter
(a) $(1,0),(0,1)$ (b) $(1,0,0),(0,0,1)$ och (c) $(1,1,2),(2,1,1)$.

Övning 3.18. Visa att punkterna $(1,1,-1),(1,-1,1)$ och $(-1,1,1)$ bildar hörn i en liksidig triangel.

Övning 3.19. Bestäm en punkt i planet så att den tillsammans med $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,-3)$ bildar en parallellogram.

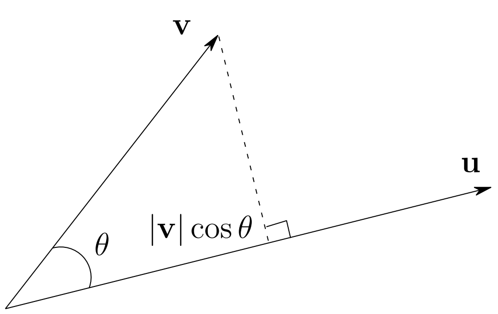
Övning 3.20. Undersök om punkterna $(1,1,2)$, $(0,3,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,4,1)$ är hörn i en parallellogram.

4. Skalärprodukt

I det här avsnittet skall vi behandla problem som har att göra med vinklar mellan vektorer. Ett viktigt tillämpningsområde är fysiken. T ex är ett uträttat arbete produkten av vägens längd och kraftens storlek i vägens riktning. Det blir då väsentligt att veta vinkel mellan dessa storheter så att man kan ta delen, komposanten, av kraften i vägens riktning genom att multiplicera kraftens storlek med cos för mellanliggande vinkel. Detta uttrycks enkelt med hjälp av *skalärprodukten* som vi nu definierar nedan.

Ett ytterligare exempel, Exempel 4.6, av skalärproduktens användbarhet är t ex att koordinaterna för en vektor i en *ortonormerad bas* (definition kommer nedan) blir väldigt enkla att beräkna genom skalärprodukten mellan vektorn och respektive basvektor.

Efter dessa preludier är det dags att definiera skalärprodukten mellan två vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Med *vinkeln* θ mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, båda skilda från $\mathbf{0}$, menas den minsta vinkel som bildas då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de börjar i samma punkt.



Definition 4.1. Skalärprodukten *av vektorerna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta\,,$$

där θ *är vinkeln mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Om $\mathbf{u}$ *eller* $\mathbf{v}$ *är* $\mathbf{0}$ *så är* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Räkneregler.
(1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(2) $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
(3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (*distributivitet*),
(4) $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$,
(5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta.

Du bör själv övertyga dig om att (1),(2),(4) och (5) gäller. Jag återkommer till (3) i slutet av paragrafen. □

För att praktiskt räkna med skalärprodukt behöver vi veta vad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ blir i koordinater. För att uttrycket skall bli enkelt antar vi att basen är ortonormerad.

Sats 4.2. *Låt* $\mathbf{u} = (x, y, z)$ *och* $\mathbf{v} = (x', y', z')$ *i ett ortonormerat koordinatsystem. Då gäller*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xx' + yy' + zz'\,.$$

I $\mathbb{R}^2$ *gäller* $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$.

Bevis. Eftersom basen är ortonormerad gäller $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Så

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \cdot (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\
&= xx'\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\
&+ (xy' + yx')\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + (xz' + x'z)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + (yz' + y'z)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\
&= xx' + yy' + zz'\,.
\end{aligned}$$

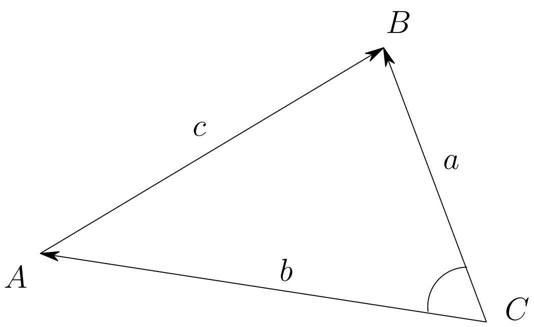
■

Exempel 4.1. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, -2)$.
Lösning. Vi har $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2^2) + 1^2 + (-2)^2} = 3$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(-2) + 2 \cdot 1 + 2(-2) = -4$. Eftersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$ får vi $\cos\theta = -4/(3 \cdot 3) \approx -0,4444$ och $\theta \approx 116,4°$.

□

Exempel 4.2. Vektorerna $(5, 2)$ och $(-2, 5)$ är vinkelräta. Med hjälp av skalärprodukt ser vi detta genast eftersom $(5, 2) \cdot (-2, 5) = 5(-2) + 2 \cdot 5 = 0$. □

Exempel 4.3. Cosinusatsen.
I en triangel gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

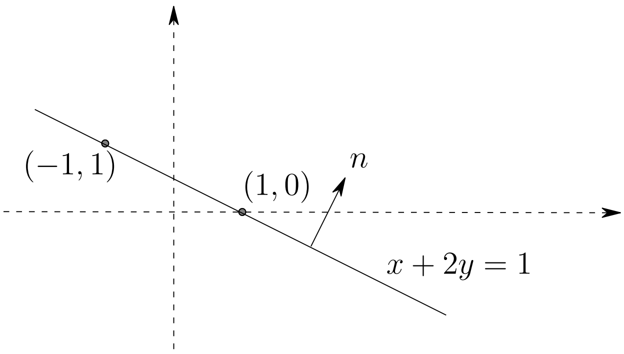


Bevis. Eftersom $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ och $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos C$ så är

$$\begin{aligned} c^2 &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA} \\ &= a^2-2ab\cos C+b^2\,. \end{aligned}$$

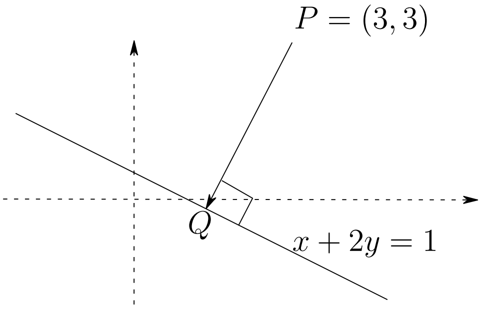
□

Exempel 4.4. Bestäm en normalvektor till linjen $x+2y=1$.
(En normalvektor är en vektor som är vinkelrät mot linjen.)



Lösning. Punkterna $(1,0)$ och $(-1,1)$ ligger på linjen, så $\mathbf{v}=(1,0)-(-1,1)=(2,-1)$ är en riktningsvektor till linjen. Men om $\mathbf{n}=(1,2)$ är $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=(1,2)\cdot(2,-1)=2-2=0$, så $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta. Alltså är $\mathbf{n}=(1,2)$ en normalvektor. □

Exempel 4.5. Bestäm avståndet från punkten $(3,3)$ till linjen $x+2y=1$.
Lösning. Med avståndet d från en punkt P till en linje menas det kortaste av avstånden $|P-Q|$ då Q ligger på linjen. Detta antas då $\overrightarrow{PQ}$ är vinkelrät mot linjen. (Varför?)



Enligt förra exemplet är $(1,2)$ vinkelrät mot linjen så $\overrightarrow{PQ}=t(1,2)$ för något t. Men $Q=P+\overrightarrow{PQ}=(3+t,3+2t)$ som ligger på linjen om $(3+t)+2(3+2t)=1$, dvs. om $t=-8/5$. Så $\overrightarrow{PQ}=-8/5(1,2)$ och $d=|\overrightarrow{PQ}|=\frac{8}{5}\sqrt{1+4}=8/\sqrt{5}\approx 3,13$.

Punkten Q kallas för *ortogonala projektionen* av P med avseende på linjen $x+2y=1$. □

Exempel 4.6. Om $\mathbf{v}=(x,y,z)=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$ i en ortonormerad bas så är $x=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1$, $y=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2$ och $z=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3$.
Bevis av den första likheten. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1=(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_1$
$=x\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1+z\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1=x$. □

Övningar

Övning 4.1. Vilka av följande par av vektorer är ortogonala?

(a) $(-1,2,2)$, $(2,2,-1)$, (b) $(2,1,1)$, $(2,1,-5)$ och (c) $(1,1,1)$, $(2,-1,-1)$.

Övning 4.2. Bestäm vinkeln mellan vektorerna (a) $\mathbf{u}=(2,2,1)$, $\mathbf{v}=(1,-1,0)$,
(b) $\mathbf{u}=(-1,2,2)$, $\mathbf{v}=(1,1,4)$ och (c) $\mathbf{u}=(3,2,1)$, $\mathbf{v}=(1,2,3)$.

Övning 4.3. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{2b}-\mathbf{a}$ då $\mathbf{a}=(2,-3,4)$ och $\mathbf{b}=(3,4,0)$.

Övning 4.4. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot
(a) $(2,-3)$, (b) (a,b), och (c) $(3,4,-2)$.

Övning 4.5. Bestäm t så att vektorerna $(t,2t^2,3t)$ och $(-1,1,t)$ blir vinkelräta.

Övning 4.6. En triangel har hörnen $(2,1,3)$, $(-1,4,2)$ och $(0,6,5)$. Är triangeln rätvinklig?

Övning 4.7. Visa att $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2-|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

Övning 4.8. (a) Bestäm avståndet från punkten $(1,2)$ till linjen $y=5$.
(b) Bestäm avståndet från punkten $(1,2)$ till linjen $x+y=5$.

Övning 4.9. Visa att (a,b) är en normalvektor till linjen $ax+by=c$.

Övning 4.10. Vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ har längderna 3, 4 och 2. Hur stor är vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$?

Övning 4.11. Låt $\mathbf{u}$ vara en fix vektor med $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ och antag att

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,.$$

Måste $\mathbf{v}=\mathbf{w}$? Motivera ditt svar!

Övning 4.12. Antag att

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$

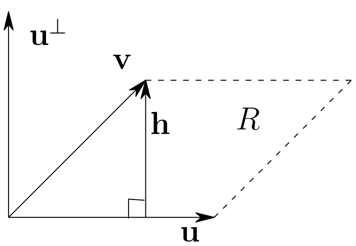
för alla $\mathbf{u}$. Måste $\mathbf{v}=\mathbf{w}$? Motivera ditt svar!

5. Area, volym och vektorprodukt

I detta kapitel är alla baser ortononomerade.

5.1. Arean av en parallellogram

Låt $\mathbf{u}=(a,b)$ och $\mathbf{v}=(c,d)$ vara sidor i en parallellogram R.



Låt $\mathbf{u}^\perp=(-b,a)$ så att $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^\perp=-ab+ba=0$ dvs. $\mathbf{u}^\perp$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$. I figuren ovan har vi för något $\beta\in\mathbb{R}$ att $\mathbf{h}=\beta\mathbf{u}^\perp$ så att för något $\alpha\in\mathbb{R}$ gäller att $\beta\mathbf{u}^\perp+\alpha\mathbf{u}=\mathbf{v}$. Genom att skalärmultiplicera höger- och vänsterled med $\mathbf{u}^\perp$ får vi $\beta|\mathbf{u}^\perp|^2+0=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^\perp$ varur vi löser ut $\beta=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^\perp/|\mathbf{u}^\perp|^2$.

Vi skall härleda en formel för R:s area A. Vi har, då ju $|\mathbf{u}^\perp|=|\mathbf{u}|$, att

$$A=|\mathbf{h}||\mathbf{u}|=|\beta\mathbf{u}^\perp||\mathbf{u}|=|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^\perp}{|\mathbf{u}^\perp|^2}\mathbf{u}^\perp||\mathbf{u}|=|\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}^\perp|=|(c,d)\cdot(-b,a)|=|ad-bc|\,.$$

Vi inför beteckningen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\,.$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ kallas för en 2×2-determinant. Vi har alltså visat

Sats 5.1. *Arean av parallellogrammen med sidorna (a,b) och (c,d) är absolutbeloppet av determinanten*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Vi passar på att definiera 3×3-determinanter genom

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Övning 5.1. Bestäm arean av
(a) den parallellogram som har hörnen $(1,1)$, $(3,4)$, $(5,2)$ och $(7,5)$
(b) triangeln med hörnen $(-2,-2)$, $(2,1)$ och $(4,1)$.

5.2. Vektorprodukt

Till två vektorer i rummet skall vi definiera en ny vektor $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, *vektorprodukten* (eller *kryssprodukten*) av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vektorprodukten har många tillämpningar. I matematik används den bl.a. för att beräkna arean av en parallellogram i rummet och för att bestämma en normalvektor till två givna vektorer. I fysik används den t.ex. för att beskriva mekaniskt moment och magnetfältet kring en elektrisk laddning.

Vektorprodukten beror på orienteringen av $\mathbb{R}^3$ och vi börjar därför med

Definition 5.2. *Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ (i denna ordning) i $\mathbb{R}^3$ är* högerorienterade *om de pekar som tumme, pekfinger och långfinger på höger hand.*

Andra sätt att uttrycka att $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ är högerorienterade är
1. Vektorn $\mathbf{w}$ pekar i riktningen av en högergängad skruv som skruvas kortaste vägen från $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$.
2. Om man inför orientering i planet för två ickeparallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (i denna ordning) genom att säga att de är *högerorienterade* om $\mathbf{u}$ ligger till höger om $\mathbf{v}$ (när de böjar i samma punkt), så är vektorerna $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ högerorienterade om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är högerorienterade (i det plan som spänns av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$) sedda från spetsen av $\mathbf{w}$.

Definition 5.3. *Givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet så definieras deras* vektorprodukt $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *som den vektor som uppfyller*
(a) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ *är arean av parallellogrammen med sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$,*
(b) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *är vinkelrät mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$*
och
(c) $\mathbf{u},\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *är högerorienterade.*

För att praktiskt kunna räkna med vektorprodukten behöver vi räkneregler och kunna beräkna den i koordinater. Eftersom vektorprodukten i sin definition bygger på orientering kommer dess uttryck i koordinater att bero på basens orientering. Vi gör följande

Definition 5.4. *En* standardbas $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *för $\mathbb{R}^3$ är en högerorienterad ortonormerad bas. På samma vis sägs en* standardbas $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *för $\mathbb{R}^2$ vara en högerorienterad ortonormerad bas i planet $\mathbb{R}^2$ (som det uttrycks i alternativa definitionen av orientering ovan).*

I resten av detta kapitel arbetar vi alltid i en standardbas.

Sats 5.5. (Räkneregler för vektorprodukt)
(1) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ *(antikommutativitet),*
(2) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$,
(3) $(t\mathbf{u})\times\mathbf{v} = t(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$,
och
(4) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$ *(distributivitet).*

Bevis. (1),(2) och (3) är lätta och lämnas åt läsaren. Beviset av distributiva lagen är svårare och vi skippar det. ∎

Sats 5.6. (Vektorprodukten i koordinater)
Om $\mathbf{u} = (x, y, z)$ *och* $\mathbf{v} = (x', y', z')$ *i en standardbas* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *så gäller*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')\,. \tag{5.1}$$

Anmärkning 5.1. Determinanten ovan består inte av tal men om vi jämför med definitionen av 3×3-determinanten har vi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},$$

vilket stämmer med högra ledet i Sats 5.8. □

Bevis. Skippar vi. ∎

Exempel 5.1. Beräkna arean av triangeln med hörnen $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ och $(2, 3, 4)$.
Lösning. $\mathbf{u} = (1, 2, 3) - (1, 1, 0) = (0, 1, 3)$ och $\mathbf{v} = (2, 3, 4) - (1, 1, 0) = (1, 2, 4)$ är sidor i triangeln. Arean av paralellogrammen med sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Nu är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, -3, -1)\ ,$$

och alltså $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$. Triangelns yta är hälften av parallellogrammens så triangelns yta är $\sqrt{14}/2 \approx 1,87$.

□

Övning 5.2. Beräkna vektorprodukten mellan vektorerna

(a) $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$, (b) $(1, 3, -2)$, $(3, 2, 1)$ och (c) $(-1, 2, 2)$, $(2, -1, 2)$.

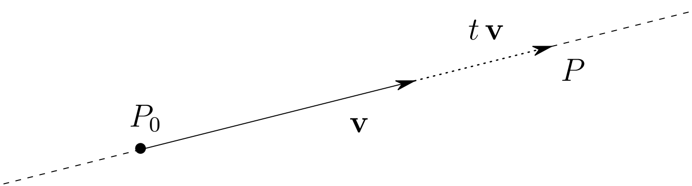
Övning 5.3. Beräkna arean av den triangel som har hörnen $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 3)$ och $(4, 3, 1)$.

Övning 5.4. Lös Exempel 5.1 genom att utnyttja att arean är $\frac{1}{2}|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$ där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

6. Linjer och plan

6.1. Räta linjen i planet

En (rät) linje i $\mathbb{R}^2$ bestäms av en punkt P_0 på linjen och en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som anger linjens riktning. Vektorn $\mathbf{v}$ kallas för en *riktningsvektor* för linjen.



En godtycklig punkt på linjen kan skrivas

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,,$$

för något reellt tal t. Om $P_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{v} = (a, b)$ och $P = (x, y)$ så gäller $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ eller

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb\,. \end{cases}$$

Detta kallas för linjens ekvation på *parameterform*.

Vi kan eliminera parametern t genom att multiplicera den första ekvationen med b, den andra med $-a$ och addera. Detta ger

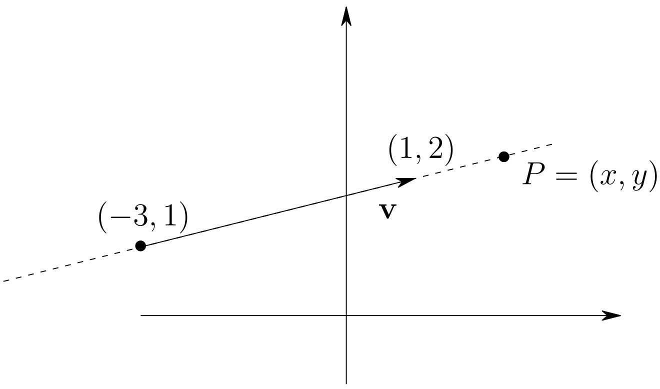
$$bx - ay = bx_0 - ay_0$$

eller med andra beteckningar

$$Ax + By = C\,.$$

Detta kallas ibland för linjens ekvation på *normalform*. (Jämför Övning 4.9.)

Exempel 6.1. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-3, 1)$.
Lösning.



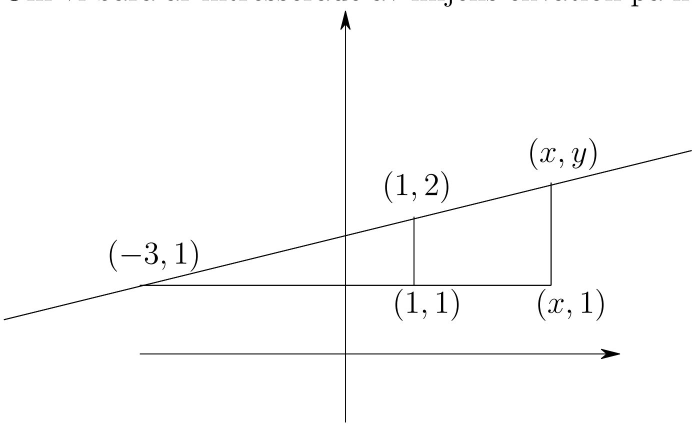
Vektorn $\mathbf{v}$ från $(-3, 1)$ till $(1, 2)$ är en riktningsvektor för linjen. Vi har $\mathbf{v} = (1, 2) - (-3, 1) = (4, 1)$. Så om $P_0 = (-3, 1)$ ger $P = P_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t\,. \end{cases}$$

Multiplicerar vi den sista ekvationen med -4 och adderar får vi

$$x - 4y = -7\,.$$

Om vi bara är intresserade av linjens ekvation på normalform kan vi få den direkt med hjälp av likformighet:



Trianglarna med hörnen $(-3, 1), (1, 1), (1, 2)$ och $(-3, 1), (x, 1)(x, y)$ är likformiga så kvoterna av kateternas längder är lika dvs.

$$\frac{y-1}{x-(-3)} = \frac{2-1}{1-(-3)}\,,$$

vilket förenklas till (Räkna själv!)

$$x - 4y = -7.$$

□

I stället för att ange en riktningsvektor för linjen kan vi ange en *normalvektor* $\mathbf{n}$. En godtycklig punkt P ligger på linjen om $P - P_0$ och $\mathbf{n}$ är vinkelräta, dvs. $\mathbf{n}\cdot(P-P_0) = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{n} = (A, B)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ och $P = (x, y)$ ger detta $(A, B)\cdot(x - x_0, y - y_0) = Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ eller

$$Ax + By = C\,,$$

där $C = Ax_0 + By_0$.

Exempel 6.1. (Fortsättning.) $\mathbf{v} = (4, 1)$ är en riktningsvektor för linjen. Så $\mathbf{n} = (-1, 4)$ är en normalvektor till linjen, som därför kan skrivas $-x + 4y = C$. Sätter vi in $P_0 = (-3, 1)$ får vi $C = 3 + 4 = 7$ så linjens ekvation är $-x + 4y = 7$ eller $x - 4y = -7$. □

Exempel 6.2. Var skär linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$$

varandra?

Lösning 1. Om (x, y) ligger på båda linjerna måste det finnas ett s och ett t så att $(x, y) = (1 + s, 2 + 2s)$ och $(x, y) = (-1 + t, t)$. Detta ger

$$\begin{cases} 1 + s = -1 + t \\ 2 + 2s = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} s - t = -2 \\ 2s - t = -2 \end{cases}.$$

Subtraherar vi den första ekvationen från den andra får vi det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\begin{cases} s - t = -2 \\ s = 0 \end{cases},$$

som har lösningen $s = 0, t = 2$. Detta ger $x = 1, y = 2$ så linjernas skär varandra i punkten $(1, 2)$.

Lösning 2. Vi skriver linjerna på normalform. För den första linjen multiplicerar vi den första raden med -2 och lägger till den andra. Detta ger $-2x + y = 0$. För den andra linjen subtraherar vi den andra raden från den första och får $x - y = -1$. Så skärningspunkten (x, y) uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases},$$

som har lösningen (Räkna själv!) $(x, y) = (1, 2)$.

□

Övning 6.1. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna $(0, 3)$ och $(-1, 1)$.

Övning 6.2. Bestäm linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-2, 3)$ på parameterform och parameterfri form. Hur långt från linjen ligger punkten $(3, -1)$.

Övning 6.3. Vad är ekvationen för den linje som går genom punkten $(2, 1)$ och är vinkelrät mot linjen $3x + y = 3$?

Övning 6.4. Var skär linjerna $3x + y = 3$ och $(x, y) = (2, 3) + t(2, -3)$ varandra?

Övning 6.5. Bestäm en linje som är vinkelrät mot vektorn $(3, 4)$ och vars avstånd till $(1, 0)$ är 5.

6.2. Räta linjen i rummet

Det finns två generaliseringar av räta linjen i planet till $\mathbb{R}^3$; linjer och plan. I detta avsnitt diskuterar vi räta linjen och i nästa planet.

Precis som i $\mathbb{R}^2$ bestäms en linje av en punkt P_0 på linjen och en riktningsvektor $\mathbf{v}$. Då kan punkterna P på linjen skrivas

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

Om $P = (x, y, z), P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ger detta linjens ekvation på parameterform,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} .$$

Om $a \neq 0, b \neq 0$ och $c \neq 0$, kan vi elliminera t ur ekvationssystemet och skriva

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} (= t)\,.$$

Exempel 6.3. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 3, 1)$
Lösning. Vektorn $\mathbf{v} = (2, 3, 1) - (1, 2, 3) = (1, 1, -2)$ är en riktningsvektor för linjen och vi har $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, -2)$ eller

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} .$$

□

Exempel 6.4. Skär linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

varandra?
Lösning. Om (x, y, z) ligger på båda linjerna måste vi ha

$$\begin{cases} 1 + t = x = 1 + 2s \\ 2 + t = y = 3s \\ 3 + t = z = 3 - s \end{cases} .$$

Den första ekvationen ger $t = 2s$. Stoppar vi in detta i den andra får vi $2 + 2s = 3s$. Alltså måste $s = 2$ och $t = 4$. Men då ger den tredje ekvationen $7 = 1$, en motsägelse. Detta innebär att linjerna *inte* skär varandra. □

Härnäst skall vi bestämma (det kortaste) avståndet från en punkt till en linje L. Detta är något svårare i $\mathbb{R}^3$ än i $\mathbb{R}^2$ (jämför Exempel 4.8) eftersom det inte bara finns en ortogonal riktning till linjen som i $\mathbb{R}^2$, utan ett plan av ortogonala riktningar. Vi nöjer oss därför med att i ett exempel beskriva en metod för att bestämma avståndet.

Exempel 6.5. Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 2, 2)$ till linjen $x = 2y = 4z$.
Lösning. Vi börjar med att bestämma en riktningsvektor för linjen. Om vi sätter $z = t$ får vi

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} ,$$

så $\mathbf{v} = (4, 2, 1)$ är en riktningsvektor för linjen. Det kortaste avståndet d är $d = |\overrightarrow{PQ}|$ där Q är den punkt på linjen sådan att $\mathbf{v}$ och $|\overrightarrow{PQ}|$ är vinkelräta. (Rita figur!) Eftersom Q ligger på linjen är $Q = (4t, 2t, t)$ för något t

och $\overrightarrow{PQ} = (4t-2, 2t-2, t-2)$. Så $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$ betyder $0 = (4t-2, 2t-2, t-2)\cdot(4,2,1) = 16t-8+4t-4+t-2 = 21t-14$, dvs. $t = 14/21 = 2/3$. Så

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{8}{3}-2, \frac{4}{3}-2, \frac{2}{3}-2\right)\right| \\ &= \left|\frac{2}{3}(1,-1,-2)\right| = \frac{2}{3}\sqrt{1+1+4} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1,63\,. \end{aligned}$$

$\square$

Övning 6.6. Bestäm skärningspunkten för de två linjerna $L_1 : (x, y, z) = (1 + t, -t, 4 + 2t)$ och $L_2 : (x, y, z) = (t, 1 - t, 3t)$.

Övning 6.7. Välj ett värde på parametern a så att punkten $(a, 0, 2a)$ ligger på den räta linje som går genom $(3, 4, 0)$ och $(2, 2, 1)$.

Övning 6.8. En partikel rör sig rätlinjigt med konstant hastighet. Den startar i punkten $(1, 2, 3)$. Efter en halv minut befinner den sig i $(2, 2, 2)$. Var befinner den sig efter 10 minuter?

Övning 6.9. Finn det kortaste avståndet från origo till linjen $x - 2 = y - 3 = z - 4$.

Övning 6.10. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till linjen $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(2, 0, 1)$.

Övning 6.11. Vilken punkt på linjen $(x, y, z) = t(2, -3, 1)$ ligger närmast punkten $(0, 1, 4)$?

Övning 6.12. Bestäm *spegelbilden* av punkten $(1, 1, 1)$ i linjen genom origo med riktningsvektor $(2, -3, 1)$. (Rita figur!)

Övning 6.13. Måste två ickeparallella linjer i (a) $\mathbb{R}^2$, (b) $\mathbb{R}^3$, skära varandra?

6.3. Plan

Ett plan i $\mathbb{R}^3$ bestämms av en punkt P_0 i planet och två ickeparallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Planet består av de punkter som uppfyller

$$P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

då s och t genomlöper de reella talen. $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kallas *riktningsvektorer* för planet.

Om vi sätter $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c'), P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $P = (x, y, z)$ får vi planets ekvation på *parameterform*,

$$\begin{cases} x = x_0 + sa + ta' \\ y = y_0 + sb + tb' \\ z = z_0 + sc + tc' \end{cases} .$$

På liknande sätt som för en linje i planet kan ett plan också bestämmas av en punkt P_0 och en normalvektor $\mathbf{n}$. Planet består av alla punkter P så att $\overrightarrow{P_0P}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$,

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}\ .$$

Om $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ger detta $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$ eller

$$Ax + By + Cz = D$$

(där $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$). Detta kallas för planets ekvation på *normalform*.

Exempel 6.6. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $P_0 = (1, 2, 3), P_1 = (3, 2, 1)$ och $P_2 = (4, 3, 2)$.

Lösning. Vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (2, 0, -2)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (3, 1, -1)$ ligger båda i planet och är inte parallella (Verifiera det!). Planets ekvation i parameterform är därför

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + 3t \\ y = 2 + 0s + t \\ z = 3 - 2s - t \end{cases} .$$

Vi ser att detta ger

$$x - 2y + z = 0 \ ,$$

som är planets ekvation på normalform.

Vi ger också en direkt härledning av denna ekvation. Vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och alltså en normalvektor till planet. Vi har

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, -4, 2) \ .$$

Så $\mathbf{n} = 1/2\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1, -2, 1)$ är en normalvektor och planet kan skrivas $x - 2y + z = D$. Stoppar vi in $P_0 = (1, 2, 3)$ i denna ekvation får vi $D = 1 - 4 + 3 = 0$, och planets ekvation är

$$x - 2y + z = 0 \ .$$

□

Två ickeparallella linjer i planet skär varandra i en punkt. I rummet däremot behöver inte två ickeparallella skära varandra (men de kan göra det).

Två plan är *parallella* om de har samma riktningsvektorer. Det är ekvivalent med att deras normalvektorer är parallella. Två plan som inte är parallella skär varandra i en linje.

Exempel 6.7. Bestäm ekvationen för den linje som är skärningen mellan planen $x+3y+3z = 4$ och $2x+7y+z = 1$.

Lösning. Punkterna (x, y, z) på linjen måste uppfylla båda dessa ekvationer,

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 7y + z = 1 \end{cases} .$$

För att lösa detta ekvationssystem multiplicerar vi den första ekvationen med -2 och lägger till den andra. Detta ger

$$\begin{cases} x + 3y + 3z & = & 4 \\ \qquad y - 5z & = & -7 \end{cases} .$$

Låter vi nu $z = t$, ger detta ekvationen (Räkna själv!)

$$\begin{cases} x = 25 - 18t \\ y = -7 + 5t \\ z = t \end{cases} .$$

□

Vi ser alltså att en linje i $\mathbb{R}^3$ antingen kan beskrivas i parameterform eller som ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta. Det första skrivsättet är bra när man skall bestämma avståndet från en punkt till en linje, det senare är mer praktiskt om man skall avgöra om en punkt ligger på linjen.

Exempel 6.8. Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 3, 4)$ till planet $x + 2y + 3z = 0$.

Lösning. Planet har normalvektorn $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$. Om Q är den punkt i planet där $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot planet så gäller $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{n}$ och $Q = P + t\mathbf{n}$ för något t. I koordinater betyder detta att $Q = (2, 3, 4) + t(1, 2, 3) = (2+t, 3+2t, 4+3t)$. Men Q ligger i planet och uppfyller därför planets ekvation så $2+t+2(3+2t)+3(4+3t) = 0$. Detta ger (Räkna själv!) $t = -10/7$ och

$$d = |\ \overrightarrow{PQ}\ | = |t\mathbf{n}| = \frac{10}{7}\sqrt{1+4+9} = \frac{10}{7}\sqrt{14} \approx 5,35\,.$$

□

Övning 6.14. Var skär linjen $L : (x, y, z) = (-3, 4, 3) + t(1, 2, 3)$
planet $\pi : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(2, 1, 0) + s(3, 0, 2)$?

Övning 6.15. Bestäm ekvationen för den räta linje som är snitt mellan planen $x + y + 7z = 3$ och $-2x + 3y + z = -11$

Övning 6.16. Är linjen

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = z + 2$$

parallell med planet (a) $x + y + z = 10$, (b) $x - y + z = 10$?

Övning 6.17. Bestäm en normal till vart och ett av följande plan
(a) $x - y + z = 1$, (b) $x - y + z = 2$ och (c) $-y - z = 3$

Övning 6.18. Bestäm en punkt så att den, $(3, 2, 1)$, $(5, 0, 2)$ och $(1, -2, 4)$
(a) inte ligger i samma plan, (b) ligger i samma plan.

Övning 6.19. En ljusstråle sänds iväg från punkten $(1, 1, 1)$ i riktningen $\mathbf{v} = (2, -1, -1)$. Var träffar denna ljusstråle planet $x + 2y - z = 10$?

Övning 6.20. Ett plan innehåller punkterna $(10, 7, -12)$, $(17, 35, -54)$ och är parallellt med vektorn $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$. Bestäm planets ekvation dels i normalform, dels i parameterform.

Övning 6.21. Finn det kortaste avståndet från origo till planet $x + 2y + 3z = 4$.

Övning 6.22. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1, -1, 1)$ till planet $2x - y = 0$.

Övning 6.23. Vilken punkt i planet $2x - y + 2z = 0$ ligger närmast punkten $(2, -1, 0)$?

Övning 6.24. Bestäm *spegelbilden* S av punkten $Q = (3, 3, 3)$ i planet $2x - y + 2z = 0$. (Rita figur!)

Övning 6.25. Bestäm ekvationen (i normalform) för det plan genom origo som är parallellt med linjerna $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 2)$ och $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(2, 1, -2)$

Övning 6.26. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(3, 1, 2)$ till det plan som innehåller punkterna $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$ och $(1, 1, 0)$.

Övning 6.27. Bestäm avståndet mellan planen $x - 2y = z$ och $2x - 4y - 2z = 2$.

Övning 6.28. Bestäm den rätvinkliga projektionen av linjen $x - 1 = -2y = z + 1$ på planet $2x + y + z = 6$.

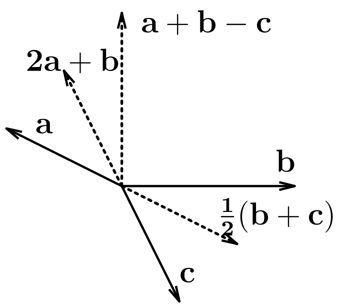
Övning 6.29. En ljusstråle med riktningen $(-1, -1, -1)$ reflekteras mot planet $x+2y+3z = 0$. Vilken riktning har den reflekterade strålen?

Övning 6.30. Försök att generalisera avståndsformeln i Exempel 4.10 till avståndet från en punkt $P = (x, y, x)$ till planet $Ax + By + Cz = D$.

7. Förslag till svar

Kapitel 2

1.



2. (a)&(b) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, (c) $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, (d) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, (e) $-\mathbf{e}_1$

3. (a) Med farten $\sqrt{40}$ m/s i riktning $341,6°$, (b) $19,5°$ 7. (b) 3

Kapitel 3

1. $(2, 2)$ 2. $(1, 1)$ 4. $(-1, 3)$ 5. $(1, -1, 2)$ 6. $(-8, 7, -9)$
7. $a = -4$ 8. (a) 0 eller 2„ (b) 1, (c) 0 eller 3 9. $\mathbf{u} = \pm\frac{1}{3}(-1, 2, 2)$
10. (a) $\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3
11. (a) $6\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ i riktningen $(1, 1, 1)$, (b) $8,70\,\mathrm{N}$ i $28,3^{\cdot}$ med avseende på ö-axeln
13. $(5, 7)$ 14. $\overrightarrow{AB}= (2, 3, 4), BC = (-1, -14, -12), \overrightarrow{CA}= (-1, 11, 8)$
15. (a) $(2, 1, 1)$, (b) $1/2(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ 16. $(5/2, 3, 7/2)$
17. $\sqrt{2}$ i alla tre fallen 18. Sidorna är $2\sqrt{2}$.
19. $(3, -2)$, $(1, -4)$ eller $(-1, 4)$ 20. Ja

Kapitel 4

1. Alla är ortogonala 2. (a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) $\arccos(5/7)$ 3. $128°$
4. T.ex. (a) $(3, 2)$, (b) $(b, -a)$ och (c) $(0, 1, 2)$ 5. 0 och 1/5,
6. Ja, vinkeln vid $(-1, 4, 2)$ är rät.
8. (a) 3 (b) $\sqrt{2}$ 10. $151°$
11. Nej 12. Ja

Kapitel 5

1. (a) 10 (b) 3 2. (a) $(1, -2, 1)$ (b) $7(1, -1, -1)$ (c) $3(2, 2, -1)$
3. $\sqrt{14}$

Kapitel 6

1. $-2x + y = 3$ 2. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$; $x + 3y = 7$ respektive $7/\sqrt{10}$
3. $3y - x = 1$ 4. $(-2, 9)$ 5. $3x + 4y = 28$ eller $3x + 4y = -22$ 6. $(2, -1, 6)$
7. $a = 1$ 8. $(21, 2, -17)$ 9. $\sqrt{2}$ 10. $\sqrt{29}/\sqrt{5}$ 11. $(2, -3, 1)/14$ 12. $(-1, -1, -1)$
13. (a) Ja, (b) Nej 14. $(-5, 0, -3)$ 15. $(x, y, z) = (4, -1, 0) + t(4, 3, -1)$
16. (a) Nej (b) Ja 17. (a) $(1, -1, 1)$, (b) $(1, -1, 1)$, (c) $(0, -1, -1)$
18. (a) T.ex. origo (nästan vad som helst går) (b) T.ex. $(3, -4, 5)$ 19. $(17, -7, -7)$
20. $6x - 3y - z = 51$ respektive $(x, y, z) = (10, 7, -12) + t(1, 2, 0) + s(1, 4, -6)$
21. $4/\sqrt{14}$ 22. $3/\sqrt{5}$ 23. $(8, -4, -10)/9$ 24. $(-1, 5, -1)$
25. $4x - 6y + z = 0$ 26. $4/\sqrt{6}$ 27. $1/\sqrt{6}$ 28. $(-1, 5, 11)$