Omstuvat utdrag ur

R Pettersson: Förberedande kurs i matematik

1 Addition, subtraktion och multiplikation av (reella) tal

För reella tal gäller som bekant bl.a. följande räkneregler:

$$
\begin{array}{llll}
(a+b)+c=a+(b+c) & \text{(associativitet)} & (ab)c=a(bc) & \text{(associativitet)} \\
a+b=b+a & \text{(kommutativitet)} & ab=ba & \text{(kommutativitet)} \\
0+a=a & \text{(identitet)} & 1\cdot a=a & \text{(identitet)}
\end{array}
$$

$$a(b+c)=(ab)+(ac)=ab+ac \text{ (distributivitet), varav } (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$ab=0 \text{ precis när något av } a \text{ eller } b \text{ är } 0.$$

För räkning med tecken har man också att:

$$
\begin{array}{lll}
(-1)\cdot a=-a & (-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-ab & (-a)(-b)=ab \\
-(a+b)=-a-b & -(a-b)=-a+b=b-a. &
\end{array}
$$

Potenser med naturligt tal n i exponenten definieras enligt:

$$a^0=1 \text{ (för } a\neq 0) \qquad a^1=a \qquad a^2=a\cdot a$$

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n \text{ stycken}}$$

Definitionen och $ab=ba$ ger *potenslagarna*:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad (a^n)^m=a^{n\cdot m} \qquad (ab)^n=a^n\cdot b^n.$$

Eftersom $(-1)^2=1$, gäller att $(-a)^1=-a$, $(-a)^2=a^2$, $(-a)^3=-a^3$ och allmänt

$$(-a)^n=\begin{cases} a^n & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ -a^n & \text{om } n \text{ är udda.}\end{cases}$$

Exempel: Med räknereglerna ovan kan man förenkla en del algebraiska uttryck:

a) $10m-9y+5y+7m+4y-m=(10+7-1)m+(-9+5+4)y=16m+0\cdot y=16m$

b) $m-[a-b-(c-m)]=m-[a-b-c+m]=m-a+b+c-m=b+c-a$

c) $3abc\cdot a^3bc^2\cdot(-4b^2)=3\cdot(-4)\cdot a\cdot a^3\cdot b\cdot b\cdot b^2\cdot c\cdot c^2=-12a^4b^4c^3$

d) $(3x^2y^3z)^4=3^4\cdot(x^2)^4\cdot(y^3)^4\cdot z^4=81\cdot x^8\cdot y^{12}\cdot z^4$

e) $(2x+3)(4x^2-6x+9)=2x\cdot 4x^2+2x\cdot(-6x)+2x\cdot 9+3\cdot 4x^2+3\cdot(-6x)+3\cdot 9=$
$=8x^3-12x^2+18x+12x^2-18x+27=8x^3+27$

Ö1. Förenkla

(a) $10t-14u+7v-t-8v+14u-8v-u$

(b) $70a+20c+33x+c-x-28a-40a-9c+41x$

Ö2. Förenkla

(a) $m + 2p - (m + p - r)$ (b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

(c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

Ö3. Beräkna

(a) 5^2 (b) 2^5 (c) $(-3)^4$ (d) $(-4)^3$ (e) 1^{100}
(f) 100^1 (g) 3^0 (h) $(-3)^0$

Ö4. Förenkla

(a) $2xz^7 \cdot 10xz$ (b) $a^2b^4c \cdot (-3ac^2) \cdot 9abc$ (c) $-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot (-7qr^3)$

Ö5. Förenkla

(a) $(3x^2y)^3$ (b) $(4ab^2c^3)^2 \cdot (-2a^2b)^3$ (c) $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

Ö6. Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

(a) $(2x - y)(x + 2y)$ (b) $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$

(c) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$ (d) $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

Följande viktiga formler bör man kunna utantill:

kvadreringsreglerna:
$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$$

kuberingsreglerna:
$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

konjugatregeln:
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$$

faktoruppdelningarna:
$$\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$$

Att skriva om ett uttryck som en produkt av andra uttryck kallas att *faktorisera* det ursprungliga uttrycket, eller att *dela upp det i faktorer* . Samtliga formler ovan handlar (åt ena hållet) om faktorisering.

Uttrycket $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan **inte** faktoriseras (med reella tal).

I matematik skiljer man på å ena sidan *formler* (eller *identiteter* eller *likheter*) och å andra sidan *ekvationer*. Båda innehåller ett vänster- och ett högerled skilda åt av ett likhetstecken. När det är frågan om en ekvation är vänstra och högra leden inte lika för alla värden på de ingående bokstäverna (variablerna). Det är en uppgift att ta reda på för vilka värden på variablerna leden blir lika. I en formel är däremot de båda leden lika för alla värden på de ingående variablerna. Vid *omskrivningar* av uttryck är det identiteter som används.

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är **allmänna konjugatregeln**:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

Man ser att detta stämmer genom att multiplicera ihop parenteserna i högra ledet.

Exempel:

a) $(3a+4b)^2 =$ (kvadreringsregeln) $= (3a^2) + 2\cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $(3+x^2)(x^2-3) = (x^2+3)(x^2-3) =$ (konjugatregeln) $= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

c) $(x-2y)^3 =$ (kuberingsregeln) $= x^3 - 3\cdot x^2 \cdot 2y + 3\cdot x\cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

d) Faktoruppdelning: $4x^2 - 9a^4 = (2x)^2 - (3a^2)^2 =$ (konjugatregeln) $=$
$= (2x+3a^2)(2x-3a^2)$

e) Faktoruppdelning: $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 =$ (alla gemensamma faktorer brytes ut) $=$
$= 2x^3\cdot(6x - x^2 - 9) = -2x^3(x^2-6x+9) = -2x^3\cdot(x-3)^2$

f) Faktoruppdelning: $x^4 + 8xy^6 = x\cdot(x^3+8y^6) = x\cdot[x^3 + (2y^2)^3] =$
$=$ (enligt formeln för a^3+b^3) $= x\cdot(x+2y^2)[x^2 - x\cdot 2y^2 + (2y^2)^2] =$
$= x\cdot(x+2y^2)(x^2-2xy^2+4y^4)$

Ö7. Utveckla

(a) $(3a-4b)^2$ (b) $(a^3+2b^2)^2$ (c) $(m^4+4)^2 + (m^4-4)^2$

Ö8. Förenkla

(a) $(6-x)(x+6)$ (b) $(a^2+y)(a^2-y)$ (c) $(x^3+3)(x^3-3)(x^6+9)$

Ö9. Utveckla

(a) $(y+3x)^3$ (b) $(3x+2y^2)^3$ (c) $(x^4-6x)^3$

Ö10. Uppdela i faktorer

(a) x^2-a^4 (b) $9x^4-25x^2$ (c) $18x+81+x^2$

(d) $x^4y+4x^2y^3-4x^3y^2$ (e) x^4-x (f) $3a^3+81b^3$

(g) x^2-x^6 (h) $54x^2y^7-16x^5y$

Koefficienterna i *utvecklingen av* $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$
\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \text{o.s.v.}
\end{array}
$$

Ett tal i triangeln fås genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför.

Exempel:

a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

c) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Ö14. Utveckla

(a) $(x-1)^5$ (b) $(1-y)^7$ (c) $(2x+a^2)^5$ (d) $(xy^2-3z)^6$

2 Bråkräkning

Med bråket $x = a/b = a : b$ menas det (reella) tal, som satisfierar ekvationen $b \cdot x = a$, om $b \neq 0$. För bråkräkning gäller bl.a. följande regler:

(förkortning och förlängning) $\dfrac{c \cdot a}{c \cdot b} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (när $c \neq 0$)

(multiplikation) $a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c}$, $\dfrac{a}{b} \cdot c = \dfrac{ac}{b}$, $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

(division; dubbelbråk) $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

(addition och subtraktion) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$, $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

Från detta följer

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

OBS:

$\dfrac{1}{a+b}$ är **inte** alltid lika med $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Inte heller är $\dfrac{a+c}{b+c}$ i allmänhet $\dfrac{a}{b}$.
Det är ett vanligt fel att tro motsatsen.

Om t.ex. $a = b = 1$, så är nämligen $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{2}$ medan $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2$.

Potenser med *negativa heltal* som exponenter definieras:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad \ldots, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{varav följer}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Exempel:

a) $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{(-a)\cdot(-1)}{b\cdot(-1)}=\dfrac{a}{-b}$, varav följer att $-\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{-(a-b)}{c}=\dfrac{-a+b}{c}=\dfrac{b-a}{c}$ och $-\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{a}{-(b-c)}=\dfrac{a}{c-b}$

b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}}=\dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}}=\dfrac{5x^3}{2y^3}=2,5\cdot x^3\cdot y^{-3}$

c) (förenkla) $\dfrac{x-y}{xy-x^2}=\dfrac{x-y}{x(y-x)}=-\dfrac{y-x}{x(y-x)}=-\dfrac{1}{x}$

d) (förenkla) $\big(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\big):\big(\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a^2}\big)=\dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab}:\dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b}=$
$=\dfrac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)}=\dfrac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{(a+b)a}{a-b}$

e) (förenkla) $\dfrac{5}{2x-2}-\dfrac{1}{3x}+\dfrac{3x+1}{1-x^2}=$ (faktoruppdela nämnarna) $=$
$=\dfrac{5}{2(x-1)}-\dfrac{1}{3x}-\dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)}=$ (minsta gemensamma nämnare är $2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)(x-1)$) $=\dfrac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)}-\dfrac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)}-\dfrac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x}=$
$=\dfrac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)}=\dfrac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)}=-\dfrac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}$

Ö15. Beräkna

(a) $\dfrac{1}{4}-\big(1\dfrac{1}{3}-2\dfrac{1}{6}\big)$ (b) $\big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\big):\big(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}\big)$

Ö16. Beräkna

(a) 2^{-2} (b) $(-3)^{-3}$ (c) 1^{-5}

Ö17. Skriv som potenser av 2

(a) $1/64$ (b) $16^3/2^{10}$ (c) $128^3/32^5$

Ö18. Förenkla

(a) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ (b) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$ (c) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$

(d) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

Ö19. Förenkla

(a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ (b) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

(c) $(x-y)^3/(y-x)^5$ (d) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$ (e) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$

(f) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$ (g) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

Ö20. Förkorta (om möjligt)

(a) $(a^3+b^3)/(a+b)$ (b) $(a^4-b^4)/(a-b)$

(c) $(a^4+b^4)/(a+b)$ (d) $(a^5-b^5)/(b-a)$

Ö21. Förenkla

(a) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}\right)$ (b) $\left(1-\frac{1}{x^4}\right)/\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$

(c) $\left[\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right]:\left[\frac{x+y}{x-y}-2+\frac{x-y}{x+y}\right]$

(d) $\left[\frac{1/a}{b}-\frac{1/b}{a}+\frac{1}{2b/a}+\frac{2}{a/b}\right]:\left[\frac{a^2+4b^2}{ab}\right]$

Ö22. Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

(a) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}$ (b) $1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2-4x}$ (c) $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{1-x^2}$

(d) $\frac{1}{x^3-8}+\frac{1}{2x^2-8}+\frac{1}{8-4x}$

3 Absolutbelopp

Definition:

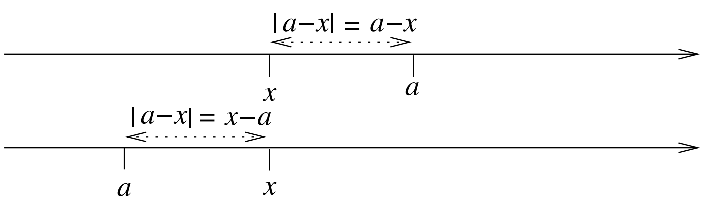
$$|x| = \begin{cases} x & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$$

OBS: $|x| \geq 0$ för alla x.

Av definitionen följer att

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{när} \quad (x-a) \geq 0, \quad \text{d.v.s. när} \quad x \geq a \\ -(x-a) = a-x & \text{när} \quad (x-a) < 0, \quad \text{d.v.s. när} \quad x < a \end{cases}$$

Geometriskt kan $|x-a|$ uppfattas som (avståndet) mellan punkterna x och a på tallinjen:



OBS:

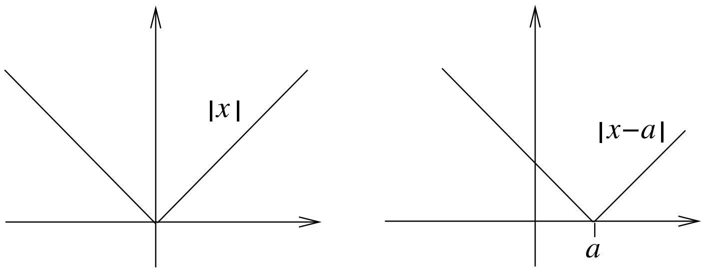
$$|x-a| = |a-x|$$

och

$$|x-a| = b \quad \text{precis när} \quad x-a = \pm b$$

Olikheten $|x-a| \leq b$ kan skrivas utan beloppstecken: $-b \leq x-a \leq b$, d.v.s. $a-b \leq x \leq a+b$, (om $b \geq 0$).

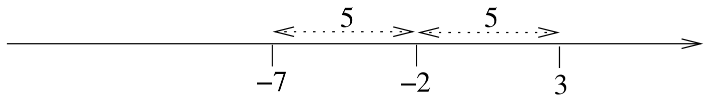
Graferna till $y = |x|$ resp. $y = |x - a|$ är:



Exempel:

a) Enligt definitionen är $|-3| = -(-3) = +3$, ty $x = -3 < 0$.

b) Ekvationen $|x + 2| = 5$ kan skrivas $|x - (-2)| = 5$. Med avståndsbetraktelse fås att lösningarna till ekvationen är ($x_1 = 3$ och $x_2 = -7$).



c) Olikheten $|x + 1| < 3$ kan skrivas $-3 < x + 1 < 3$, d.v.s. $-4 < x < 2$.

Exempel: Lös ekvationen $|x - 3| + |2x + 1| = 5$.

Lösning: Vi har $|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{när} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{när} \quad x < 3 \end{cases}$

och $|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{när} \quad 2x + 1 \geq 0, \quad \text{d.v.s.} \ x \geq -1/2 \\ -(2x+1) & \text{när} \quad x < -1/2 \end{cases}$

Vi måste alltså studera 3 olika fall:

Fall 1: När $x \geq 3$ fås ekvationen $(x - 3) + (2x + 1) = 5$, d.v.s. $3x = 7$, som ger $x = 7/3$. Men $7/3 < 3$, d.v.s. $7/3$ ligger *inte* i det rätta intervallet, så $x = 7/3$ är *inte* en lösning till den givna ekvationen.

Fall 2: När $-1/2 \leq x > 3$ fås ekvationen $-(x - 3) + (2x + 1) = 5$, som ger $x = 1$. $x_1 = 1$ ligger i intervallet $-1/2 \leq x < 3$ och är alltså en lösning. (Pröva genom insättning i den givna ekvationen!)

Fall 3: När $x < -1/2$ fås $-(x - 3) - (2x + 1) = 5$, som ger $x = -1$. Eftersom $x_2 = -1$ ligger i rätt intervall är det en lösning.

Svar: Ekvationen $|x - 3| + |2x + 1| = 5$ har lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$.

Tillägg (till exemplet ovan): Om vi vill rita grafen till
$y = |x-3| + |2x+1|$, så skriver vi

$$y = \begin{cases} (x-3)+(2x+1) = 3x-2 & \text{när} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)+(2x+1) = x+4 & \text{när} \quad -1/2 \leq x < 3 \\ -(x-3)-(2x+1) = -3x+2 & \text{när} \quad x < -1/2 \end{cases}$$

Man ser av grafen för $y = |x-3| + |2x+1|$, att t.ex. ekvationen $|x-3| + |2x+1| = 2$ *saknar lösning.*

Ö27. Bestäm

(a) $|7|$ (b) $|-7|$ (c) $|0|$

Ö28. Lös ekvationerna

(a) $|x+1| = 1$ (b) $|3-x| = 7,5$ (c) $|x+4| = 0$

(d) $|3-2x| = 5$ (e) $|x-2| = -2$

Ö29. Bestäm (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

(a) $|x-1| \leq 2$ (b) $|x+3| < 5$

(c) $2 < |x-2| \leq 3$ (d) $|x+2| \leq 0$

Ö30. Lös ekvationerna

(a) $|x-2| + |x+1| = 4$ (b) $|x-2| + |x+1| = 3$

(c) $|x-5| + 3|x+5| = 20$ (d) $|x-5| + 3|x+5| = 10$

4 Kvadratrötter

Vi observera först att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla (reella) tal } x$$

för, om t.ex. $x = -t < 0$, så är $x^2 = (-t)^2 = (-1)^2 \cdot t^2 = +t^2 > 0$, ty $t = -x > 0$. Alltså har ekvationen $x^2 = b$ (reella) lösningar bara om $b \geq 0$.

Definition:

Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b, d.v.s.

$(\sqrt{b})^2 = b$, om $b \geq 0$.

OBS: $\sqrt{b} > 0$ när $b > 0$.

Anmärkning. Tal som är > 0 kallas *positiva* medan de som är < 0 kallas *negativa*. Talet 0 är allstå varken positivt eller negativt. De tal som är ≥ 0 är alltså de tal som inte är negativa och de kallas därför för icke-negativa. Tal som är ≤ 0 är de tal som inte är positiva och de kallas därför för icke-positiva. I ärlighetens namn ska medges att inte minst professionella matematiker struntar i distinktionen mellan positivt tal och icke-negativt tal; med "positivt tal" avses ofta "icke-negativt" tal.

Exempelvis är $\sqrt{9} = 3$.

När $b > 0$ har ekvationen $x^2 = b$ (två) olika reella lösningar (rötter):

$x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

för $x_1^2 = (\sqrt{b})^2 = b$ (enligt definition), men också $x_2^2 = (-\sqrt{b})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{b})^2 = b$. Man skriver

$$x^2 = b \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b} \quad (\text{när } b \geq 0).$$

(När $b = 0$ är $x_1 = x_2 = 0$ en *dubbel*rot.)

Exempelvis har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d.v.s. $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. Från definitionen av $\sqrt{b}$ följer bl.a. följande räkneregler:

1) $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, d.v.s. $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = -a$ om $a < 0$,
2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$, för a och $b > 0$.

En viktig tillämpning av reglerna 1 och 2 är

3) $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$, alla a

Ett bråk med rotuttryck i nämnaren kan omformas med reglerna 4 eller 5:

4) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, för $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$,

5) $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$.

Reglerna 5) kallas förlängning med konjugerat uttryck; $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ är det konjugerade uttrycket till $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ och vice versa. Man bör inte lära sig 4) och 5) utantill, men man ska veta att en lämplig förlängning kan få bort ett rotuttryck ur nämnaren. T.ex. är första delen av 5)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ &= (\text{konjugatregeln}) = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}\end{aligned}$$

när $a \neq b$, a och $b > 0$.

OBS: I allmänhet är $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, (alltför vanligt fel att tro motsatsen). Om t.ex. $a = b = 1$ ger $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$ medan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exempel:

a) Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$, d.v.s. $x^2 = 3/4$ har lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{3/4} = \pm\sqrt{3}/2$

b) (skriv med heltalsnämnare): $\dfrac{1}{5+\sqrt{6}}$ = [multiplicera med konjugatuttrycket] =

$$= \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

Exempel:

a) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3}$

c) För $a > 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$

d) För $a < 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{b} = -(-a)\sqrt{b} = -\sqrt{(-a)^2 \cdot b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$

e) För $a > 0, b > 0$ är $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$

f) För $a < 0, b < 0$ är $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = -(-a)\sqrt{\frac{b}{a}} = -\sqrt{(-a)^2 \cdot \frac{b}{a}} = -\sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = -\sqrt{ab}$

g) (förenkla): $\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}} = -\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}} = -\sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x-3}} = -\sqrt{x-3}$ för $x > 3$.

OBS: $\sqrt{x-3}$ är definierat för $x - 3 \geq 0$, d.v.s. $x \geq 3$, men $1/\sqrt{x-3}$ endast för $x > 3$].

h) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x^3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2(1+x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+x}} = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+x}} = \begin{cases} 1/\sqrt{1+x} & \text{för} \quad x > 0 \\ -1/\sqrt{1+x} & \text{för} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!!!

Ö31. Förenkla

(a) $\sqrt{0,49}$ (b) $\sqrt{90000}$ (c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{75}$ (d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$

(e) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$ (f) $\sqrt{2} - \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} - \sqrt{32} + \sqrt{64}$ (g) $\sqrt{21 + \sqrt{5}}$

(h) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$

Ö32. Lös ekvationen

(a) $x^2 - 25 = 0$ (b) $5 - x^2 = 0$ (c) $9x^2 - 4 = 0$ (d) $16 - 6x^2 = 0$
(e) $x^2 = 0$

Ö33. Skriv med heltalsnämnare

(a) $2/\sqrt{6}$ (b) $3/\sqrt{21}$ (c) $1/(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (d) $2/(\sqrt{11} - 3)$

(e) $1/(2 - \sqrt{5})$ (f) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})/(\sqrt{6} + \sqrt{3})$

Ö34. Förenkla (och ange definitionsmängd): (a) $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$ (b) $x/\sqrt{x^2}$ (c) $(\sqrt{x})^2/x$

(d) $(x^2 - 9x)/\sqrt{9 - x}$ (e) $x/\sqrt{x^3 - 2x^2}$ (f) $\sqrt{x^3 + 2x^2}/x$

5 Komplexa tal

Ekvationen $x^2 = b$ saknar *reella* lösningar, om $b < 0$. Däremot har den *imaginära* (d.v.s. ickereella) lösningar. Sätt $b = -c$:

> Ekvationen $x^2 = -c$ har för $c > 0$ två olika *rent imaginära lösningar* $x_1 = i\sqrt{c}$ och $x_2 = -i\sqrt{c}$, där $i^2 = -1$, d.v.s
>
> $x^2 = -c$ precis när $x_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$, om $c > 0$.

Man kan också (något oegentligt) skriva: $x^2 = -c$ precis när $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c}$, om $c > 0$.

Exempel: $x^2 + 12 = 0$, d.v.s $x^2 = -12$ ger $x_{1,2} = \pm\sqrt{-12} = \pm i\sqrt{12} = \pm i \cdot 2\sqrt{3}$

Ö35. Lös ekvationerna

(a) $x^2 = -4$ (b) $3 + 25x^2 = 0$ (c) $9 + 12x^2 = 0$ (d) $9 - 12x^2 = 0$

(e) $(x-2)^2 = -9$ (f) $(x+1)^2 + 4 = 0$ (g) $x^4 = 16$ (sätt $x^2 = z$)

> Ett **komplext tal** kan skrivas på formen $u + i \cdot v$, där u och v är *reella* tal och i är den *imaginära enheten*, som satisfierar ekvationen: $i^2 = -1$.

Talet $u + i{\cdot}$v är *reellt* om $v = 0$, *imaginärt* om $v \neq 0$ och *rent imaginärt* om $u = 0, v \neq 0$. Räknereglerna för reella tal gäller också för komplexa tal, (med tillägget: $i^2 = -1$).

Exempel: $\dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = [\text{konjugatregeln}] = \dfrac{3-4i}{3^2-(4i)^2} =$
$= \dfrac{3-4i}{9-16i^2} = \dfrac{3-4i}{9+16} = \dfrac{3-4i}{25} = \dfrac{3}{25} - i \cdot \dfrac{4}{25}$

Ö36. Skriv på formen $u + iv$

(a) $(3+i) - (1-4i)$ (b) $(3+i)(1-4i)$

(c) $(3-4i)^2$ (d) $1/(1+i)$ (e) $1/(1-4i)$ (f) $(3+i)/(1-4i)$

(g) $1/(3+i) + 1/(1-4i)$

6 Polynom och rationella uttryck

> Med **polynom** (i x) menas uttryck av formen
>
> $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
>
> där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ och a_0 kallas *koefficienter* för $x^n, x^{n-1}, \ldots, x$ resp. $x^0 (= 1)$.
> Om $a_n \neq 0$ så säges $p(x)$ vara av *graden* n.

Exempel: Kvadratkomplettering (i andragradspolynom)

$x^2 - 6x + 11 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 11 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 11 =$ (kvadreringsregeln) $=$
$= (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$. (Om man sätter $x - 3 = t$, så fås ett uttryck $t^2 + 2$ utan t-term, dvs utan förstagradsterm).

Exempel: Bestäm största värdet av $f(x) = 12x - 2x^2 - 22$.

Lösning: $f(x) = 12x - 2x^2 - 22 =$ (bryt ut koefficienten för x^2) $= -2(x^2 - 6x + 11) =$
$=$ (kvadratkomplettera) $= -2[(x-3)^2 + 2] = -2(x-3)^2 - 4$. Eftersom $(x-3)^2 \geq 0$ för alla reella x, så antar $f(x) = -2(x-3)^2 - 4$ sitt *största värde* -4 *när* $x = 3$.

Ö11. Kvadratkomplettera

(a) $x^2 + 4x + 1$ (b) $4x^2 - 36x + 100$ (c) $3 - 12x - x^2$

Ö12. Bestäm minsta värdet av

(a) $x^2 + 2x$ (b) $3x^2 - 2x + 1$ (c) $x^4 - 8x^2 + 1$

(d) $x^4 + 8x^2 + 1$

Ö13. Bestäm största värdet av

(a) $7 - x^2 + 4x$ (b) $x + 1 - 5x^2$

Ett **rationellt tal** är ett tal som kan skrivas på formen $\dfrac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$.
Ett **rationellt uttryck** ($i\,x$) är ett uttryck som kan skrivas på formen $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och $q(x) \not\equiv 0$, d.v.s. $q(x)$ ej är identiskt noll.

Om gradtalet för $p(x)$ är större än eller lika med gradtalet för $q(x)$, kan $p(x)$ divideras med $q(x)$, så att

$\dfrac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ (d.v.s. $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$), där $r(x)$ har lägre grad än $q(x)$ (eller är $\equiv 0$) .
$k(x)$ kallas kvot(polynom) och $r(x)$ rest(polynom).

Exempel: Dividera $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ så långt som möjligt.

Lösning:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x + 1 (= k(x)) \\
(q(x) =) \underline{x^2 - 2x + 3} | & \overline{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1} (= p(x)) \\
 & \underline{-(2x^3 - 4x^2 + 6x)} \\
 & x^2 + 2x + 1 \\
 & \underline{-(x^2 - 2x + 3)} \\
 & 4x - 2 (= r(x))
\end{array}
$$

vilket ger

$$\frac{2x^3-3x^2+8x+1}{x^2-2x+3}=2x+1+\frac{4x-2}{x^2-2x+3}$$

Ö24. Utför följande divisioner:

(a) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$ (b) $\dfrac{x^4+x}{x^4-1}$ (c) $\dfrac{2x^3+8x^2-7x+4}{x^2+5x-3}$

(d) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^2+4x+3}$ (e) $\dfrac{2x^3-3x^2+8x+1}{2x+1}$ (f) $\dfrac{3x^4-x^3-x^2-x}{3x^2-x-2}$

7 Ekvationer av grad två

En ekvation av grad två $ax^2+bx+c=0$ kan, då $a\neq 0$, skrivas på *normalform*: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. En andragradsekvation på normalform, $x^2+px+q=0$, kan lösas genom **kvadratkomplettering**:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\big(\frac{p}{2}\big)^2-\big(\frac{p}{2}\big)^2+q=0,\quad \text{d.v.s.}\quad \big(x+\frac{p}{2}\big)^2=\big(\frac{p}{2}\big)^2-q,$$

varför $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\big(\frac{p}{2}\big)^2-q}$.

Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ har lösningarna

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\big(\frac{p}{2}\big)^2-q}.$$

Dessa lösningar x_1 och x_2 är

1) reella och olika, om $\big(\frac{p}{2}\big)^2-q>0$,

2) reella och lika, om $\big(\frac{p}{2}\big)^2-q=0$,

3) imaginära och olika, om $\big(\frac{p}{2}\big)^2-q<0$.

OBS: Ekvationen $x^2+px=0$, för $q=0$, har lösningen $x_1=0$ (och $x_2=-p$).

Exempel:

a) Ekvationen $x^2+6x+5=0$ har lösningarna
$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{(-3)^2-5}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm\sqrt{4}=-3\pm 2$ d.v.s. $x_1=-3+2=-1$ och $x_2=-3-2=-5$

b) Ekvationen $6+3x-4x^2=0$ kan skrivas $x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=0$, som har lösningarna $x_{1,2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\big(\frac{3}{8}\big)^2+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9+96}{64}}=\frac{3}{8}\pm\frac{1}{8}\cdot\sqrt{105}$, d.v.s $x_1=(3+\sqrt{105})/8$ och $x_2=(3-\sqrt{105})/8$.

c) Ekvationen $x^2+6=4x$ kan skrivas $x^2-4x+6=0$ med lösning $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{-2}=2\pm i\cdot\sqrt{2}$ d.v.s. $x_1=2+i\cdot\sqrt{2}$ och $x_2=2-i\cdot\sqrt{2}$

Ö37. Lös ekvationerna

(a) $x^2+3x-4=0$ (b) $3+2x-x^2=0$ (c) $2x^2=3+x$

(d) $3x+7x^2=0$ (e) $4x^2+9=12x$ (f) $5x^2+3x=1$

Ö38. Lös ekvationerna

(a) $x^2+2x+2=0$ (b) $5x^2+3x+1=0$ (c) $3x^2+1=3x$

Ö39. Lös ekvationerna

(a) $x+3=4\cdot x^{-1}$, (multiplicera med x)

(b) $x+9x^{-1}=12$ (c) $3+x^{-2}=x^{-1}$

Ö40. Lös i följande ekvationer ut y uttryckt i x:

(a) $3y^2+5xy=2x^2$ (b) $y^2+3xy-10x^2+y+5x=0$

(c) $2y^2-2x^2-3xy+3x+y-1=0$ (d) $x^2+5y^2+2xy=8y-3$

Om *ekvationen* $x^2+px+q=0$ har lösningarna x_1 och x_2, så kan *polynomet* x^2+px+q **faktoriseras**:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

Anmärkning. Om $(p/2)^2-q<0$, så är x_1 och x_2 icke-reella, och i så fall kan x^2+px+q **ej** faktoruppdelas med *reella* tal. (Däremot kan x^2+px+q alltid faktoruppdelas med *komplexa* tal).

Av likheten $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=x\cdot x-x_1\cdot x-x\cdot x_2+x_1\cdot x_2=$ $=x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2$ fås följande **samband mellan lösningar och koefficienter till en andragradsekvation**:

om x_1 och x_2 är lösningarna till $x^2+px+q=0$ så gäller att $x_1+x_2=-p$ och $x_1\cdot x_2=+q$.

Exempel: Faktorisera $1-2x-3x^2$.

Lösning: $1-2x-3x^2=$ [bryt ut koefficienten för x^2] $=(-3)\cdot\big(x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}\big)$. Lös först ekvationen $x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}=0$. Man får $x_1=1/3$ och $x_2=-1$ (visa detta!). Då är $1-2x-3x^2=(-3)\cdot\big(x-\frac{1}{3}\big)\cdot(x+1)$ en faktorisering. Den kan även skrivas $(1-3x)(x+1)$.

Ö41. Faktorisera (med reella tal)

(a) x^2+x-6 (b) $8-6x-2x^2$ (c) x^2-x-1 (d) x^2+x+1

Ö42. Ange ett polynom av grad två med nollställena

(a) 2 och -5 (b) $-\dfrac{1}{2}$ och $\dfrac{2}{3}$ (c) $1+\sqrt{5}$ och $1-\sqrt{5}$

(d) $2+i$ och $2-i$

Ö43. Härled sambanden mellan nollställen och koefficienter utgående från formeln $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$.

En ekvation av grad fyra, *som saknar* $x-$ *och* x^3*-termer*, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kan med (substitutionen $x^2 = z$) överföras till en ekvation av grad två (för z), $az^2 + bz + c = 0$.

Om denna ekvation av grad 2 har lösningarna z_1 och z_2, så har den ursprungliga ekvationen (av grad fyra) lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$, ty $x^2 = z$.

Exempel: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$. Sätt $x^2 = z$. Då fås $z^2 - 20z + 64 = 0$ med lösningar $z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$, d.v.s. $z_1 = 16$ och $z_2 = 4$.

$x^2 = z_1 = 16$ ger $x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ och $x^2 = z_2 = 4$ ger $x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, d.v.s. lösningarna till $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ är $4, -4, 2$ och -2.

OBS: En ekvation av grad fyra har alltid fyra lösningar, (som kan vara olika eller lika).

Ö44. Lös ekvationen

(a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ (b) $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$ (c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

(d) $24x^2 = 72 + 2x^4$ (e) $6x^4 = 7x^2 + 3$

Anmärkning. Flera olika typer av ekvationer (t.ex. rot-, exponential- och trigonometriska) kan i vissa fall med lämpliga *substitutioner* överföras till ekvationer av grad två.

Ö45. Lös ekvationerna

(a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$, (sätt $2^x = z$) (b) $3^x = 4 - 3^{1-x}$, (sätt $3^x = z$)

(c) $x + 6\sqrt{x} = 1$, (sätt $\sqrt{x} = z$).

8 Faktorsatsen. Ekvationer av gradtal större än två.

Faktorsatsen: Om $p(x)$ är ett polynom i x och $p(x_1) = 0$, d.v.s. om x_1 är en lösning till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är $(x - x_1)$ en *faktor* i $p(x)$, d.v.s.

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med en enhet lägre gradtal än $p(x)$. En lösning till $p(x) = 0$ kallas ett *nollställe* till polynomet $p(x)$.

Exempel: Lös ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$.

Lösning: Efter prövning (av t.ex. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) finner man att $x_1 = 2$ är en lösning, för $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 8 - 18 + 10 = 0$. Enligt faktorsatsen är då $x^3 - 9x + 10$ delbart med $x - x_1 = x - 2$.

Metod 1: S.k. lång division med $(x - 2)$ (Se paragraf 1.6) ger $x^3 - 9x + 10 =$
$= (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$. (Genomför räkningarna!).

Metod 2: Ansätt $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$. Man ser direkt (genom multiplicering av parenteserna i högra ledet), att $a = 1$ och $c = -5$. Då är $x^3 - 9x + 10 = (x - 2) \cdot (x^2 + b \cdot x - 5) = x^3 + b \cdot x^2 - 5x - 2x^2 - 2bx + 10 = x^3 + (b - 2)x^2 - (5 + 2b)x + 10$, varav fås $b = 2$, (vid jämförelse av första och sista ledet).

Vi har alltså $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(x^2 + 2x - 5) = 0$, där $x_1 = 2$.
Ekvationen $x^2 + 2x - 5 = 0$ ger $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 + 5} = -1 \pm \sqrt{6}$.

Svar: Lösningarna är $x_1 = 2, x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$.

Anmärkning. En ekvation av grad tre har tre lösningar, (lika eller olika).

Exempel: Faktorisera (med reella tal) $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$.

Lösning: Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ har lösningen $x_1 = 1$. Man finner (genom division med $(x - 1)$) att $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x - 1)(x^2 - 2x + 4)$. Ekvationen $x^2 - 2x + 4 = 0$ har imaginära lösningar (visa detta!). Polynomet $x^2 - 2x + 4$ kan därför **inte** ytterligare faktoruppdelas med *reella* tal.

Svar: $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x - 1)(x^2 - 2x + 4)$

Exempel: Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har lösningarna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Den givna ekvation, som är av fjärde graden, skall ha fyra lösningar. Ekvationen kan skrivas:

$$(x^2 - 2x - 7)(x^2 - 2x - 7) = 0.$$

Av detta inser man att $x_3 = x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$ och att $x_4 = x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Svar: Lösningarna är $1 + 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}$, $1 - 2\sqrt{2}$ och $1 - 2\sqrt{2}$ (*dubbla lösningar*).

Ö46. Lös ekvationerna

(a) $x^3 + 3x^2 + x = 0$ (b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

(c) $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$ (d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

(e) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$ (f) $3 \cdot x^{-2} + 18 \cdot x^{-3} = 1 + 4 \cdot x^{-1}$

Ö47. Lös ekvationerana

(a) $(x - 1)^3 = 0$ (b) $x^3 - 1 = 0$ (c) $(x^2 + 1)^3 = 0$

(d) $(x^3 + 1)^2 = 0$

Ö48. Faktorisera (med reella tal):

(a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (b) $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$

(c) $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ (d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3$ (e) $12x + 4x^3 - 2x^4 - 8x^2 - 6$

Här är några exempel på andra typer av ekvationer:

Exempel: Lös ekvationen $\dfrac{5x+7}{4x-14} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3x+11}{2x-7}$

Lösning: Multiplikation med minsta gemensamma nämnaren $6(2x-7) \neq 0$ ger ekvationen $3(5x+7)-2(2x-7) = 6(3x+11)$ d.v.s. $15x+21-4x+14 = 18x+66$ eller $(15-4-18)x = 66-21-14$ d.v.s. $-7x = 31$ med lösning $x = -\dfrac{31}{7} = -4\dfrac{3}{7}$

Ö23. Lös ekvationen

(a) $\dfrac{3x}{7} = 2\dfrac{1}{13}$ (b) $\dfrac{25x - 0,05}{0,4} - \dfrac{0,5 + 10x}{2} = 0,2$ (c) $\dfrac{x-1}{x+2} = 3$

(d) $\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{x}{x^2-9} + \dfrac{1}{6-2x} = \dfrac{5}{2(x+3)}$ (e) $\left[\dfrac{x+1}{x-1} - 1\right] : \left[1 + \dfrac{1}{x-1}\right] = \dfrac{1}{2}$

Ö23′. En pappa, som är 33 år, är 66 gånger så gammal som sin son. När blir han endast 6 gånger så gammal?

9 Rotekvationer

En rotekvation är en ekvation, där den obekanta storheten förekommer under rotmärke. En sådan ekvation kan (ibland) lösas med bortskaffande av rotmärket genom en eller flera *kvadreringar*, (eventuellt efter överflyttning av vissa termer).

> **OBS**: Den kvadrerade ekvationen kan ha fler lösningar än den ursprungliga rotekvationen. *Prövning* av lösningarna är därför nödvändig!

Man har nämligen att $q(x) = \sqrt{p(x)} \Rightarrow (q(x))^2 = p(x)$, men att $(q(x))^2 = p(x) \Rightarrow q(x) = \pm\sqrt{p(x)}$. När man löser ekvationen $(q(x))^2 = p(x)$ löser man i själva verket två ekvationer samtidigt nämligen $q(x) = \sqrt{p(x)}$ **och** $q(x) = -\sqrt{p(x)}$. Vid prövning av en lösning räcker det att avgöra till vilken av dessa båda ekvationer lösningen hör.

Exempel: Lös ekvationen $1 + \sqrt{x^2+5} = 2x$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$. Kvadrering ger $x^2 + 5 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, d.v.s. $3x^2 - 4x - 4 = 0$, som löses. Man får $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste *prövning* ske genom insättning i den givna ekvationen, *eller* (*bättre*) genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2 = p \Leftrightarrow q = \pm\sqrt{p}$):
$x_1 = 2$ ger *vänster led*: $VL = 1 + \sqrt{x^2+5} = 1 + \sqrt{4+5} = 1 + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$ och *höger led*: $HL = 2x = 2 \cdot 2 = 4$. Därmed *är* $x_1 = 2$ en lösning till den givna ekvationen.

$x_2 = -2/3$ ger $VL = 1 + \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = 1 + \sqrt{\frac{40}{9}} = 1 + \frac{7}{3} = 10/3$, men $HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$ $= -4/3$. Därmed är $x_2 = -2/3$ *inte* en lösning till den givna ekvationen. (Lösningen $x_2 = -2/3$ är en s.k. *falsk lösning*, som dykt upp på grund av kvadreringen).

Svar: Ekvationen har lösningen $x_1 = 2$.

Anmärkning. $x_2 = -2/3$ är lösning till ekvationen $1 - \sqrt{x^2 + 5} = 2x$.

Ö49. Lös ekvationerna

(a) $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$ (b) $x + 2\sqrt{x} = 8$ (c) $\sqrt{x + 132} = x$

(d) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} - x = 3$ (e) $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$

(f) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$

10 Linjära ekvationssystem. (Ekvationer av första graden med två eller flera obekanta)

Vid lösning av ekvationer med flera obekanta försöker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som bara innehåller en obekant.

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$

Metod 1: (Substitutionsmetoden): Den första ekvationen ger $x = (5 - 2y)/3$, som insättes (substitueras) i den andra ekvationen. Då fås $7(5 - 2y)/3 + 3y = 1$, d.v.s. $35 - 14y + 9y = 3$ eller $32 = 5y$, varför $y = 32/5 = \underline{6,4}$ och $x = (5 - 2y)/3 = -13/5 = \underline{-2,6}$.

Metod 2: (Additionsmetoden): Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 resp. (-3) och addera:

$$\begin{cases} 21x + 14y = 35 \\ -21x - \ \ 9y = -3 \end{cases}$$
$$5y = 32$$

Från detta får man $y = 32/5 = \underline{6,4}$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5 = \underline{-2,6}$.

Svar: $x = -2,6$ och $y = 6,4$

OBS: Man bör alltid *kontrollera svaret* genom insättning i de givna ekvationerna!

Anmärkning 1. I exemplet ovan gäller att:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ \quad\ \ 5y = 32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d.v.s. koefficienterna för x och y bildar en triangel.

Anmärkning 2. Den linjära ekvation $ax + by = c$ betyder geometriskt en **rät linje**. Ett system av två sådana linjära ekvationer har alltså

a) *en*, b) *ingen* eller c) *oändligt* många lösningar beroende på om de räta linjerna är a) *skärande* b) *parallella* (och olika) eller c) *sammanfallande*.

Ö25. Lös ekvationssystemen

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = -4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - 6y = 8 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 15x + 14y = 59 \\ 12x - 35y = 1 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} 1/x + 1/y = 5/6 \\ 1/x - 1/y = 1/6 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} 2x - y + z = 20,1 \\ x + y - z = 9,9 \\ 3x + 2y + 8z = 30,4 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$ (k) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$

Ö26. En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag bara 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han?

11 Ekvationssystem av högre grad

Vissa system av ekvationer med två (eller flera) obekanta kan lösas med (substitutionsmetoden):

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} (x + y)(x - 1) = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$

Lösning: Ekvation (1) ger $x + y = 0$ *eller* $x - 1 = 0$.

Fall 1: $\underline{x + y = 0}$, d.v.s. $y = -x$ ger insatt i ekvation (2), $x^2 + x^2 = 4$, varav fås $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Men $y = -x$. Vi får alltså lösningarna

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Fall 2: $\underline{x - 1 = 0}$, d.v.s. $x = 1$ ger insatt i ekvation (2), $1 + y^2 = 4$, varav fås $y_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Vi får alltså lösningarna $x_3 = 1$, $y_3 = \sqrt{3}$ och $x_4 = 1$, $y_4 = -\sqrt{3}$.

Svar: (x, y) är lika med $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(1, \sqrt{3})$ eller $(1, -\sqrt{3})$.

Anmärkning. Geometriskt betyder ekvation (1) (i exemplet ovan) två räta linjer och ekvation (2) en cirkel. Lösningarna är alltså koordinaterna för skärningspunkterna. (Rita figur!).

Ö50. Lös ekvationssystemen

(a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} (y+2)(x+y+1)=0 \\ x^2+y^2+4y=9 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2-xy=x \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2y^2+xy+4x^2=10 \\ y^2-2xy+12x^2=5 \end{cases}$

12 Olikheter

För olikheten $a > b$ gäller bl.a. följande räkneregler:

$$\begin{array}{ll}
a > b \Leftrightarrow a-b > 0 & a > b \Leftrightarrow a\cdot c > b \cdot c, \quad \text{om} \quad c > 0 \\
a > b \Leftrightarrow -a < -b & a > b \Leftrightarrow a\cdot c < b \cdot c, \quad \text{om} \quad c < 0 \\
a > b \Leftrightarrow a+c > b+c & a > b \Leftrightarrow a/c > b/c, \quad \text{om} \quad c > 0 \\
a > b \Leftrightarrow a-c > b-c & a > b \Leftrightarrow a/c < b/c, \quad \text{om} \quad c < 0
\end{array}$$

För olikheterna $a < b, a \geq b$ och $a \leq b$ gäller liknande regler.

OBS: $a > b \Leftrightarrow b < a$ och $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$.

Vid behandling av olikheter (nedan): flytta alltid över termer, så att *ena ledet blir* 0.

Exempel: För vilka x är $2x^3 < 7x^2 + 5x - 4$?

Lösning: Olikheten kan skrivas $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 < 0$. Ekvationen $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 0$ har lösningarna $x_1 = -1$, $x_2 = 1/2$ och $x_3 = 4$ (visa detta!). Enligt faktorsatsen är då $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-4)$.

För att bestämma de x, för vilka $p(x) < 0$, kan vi sätta upp följande teckentabell:

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<4$	$x=4$	$x>4$
$(x+1)$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$(x-\frac{1}{2})$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$(x-4)$	$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
$p(x)$	$---$	0	$+++$	0	$---$	0	$+++$

Vi finner att $p(x) < 0$, om $x < -1$ eller $\frac{1}{2} < x < 4$.

Svar: Olikheten gäller, om $x < -1$ eller $1/2 < x < 4$.

Exempel: För vilka x är $\dfrac{1}{x} \geq 2x - 1$?

Lösning: Olikheten kan skrivas:

$$R(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 - 2x^2 + x}{x} \geq 0.$$

$R(x)$ är en rationell funktion, där täljare (och nämnare) kan faktoruppdelas. Täljaren $T(x) = 1 - 2x^2 + x$ har nollställena $-1/2$ och 1. Därför är $T(x) = (-2)(x + 1/2)(x - 1) = -(2x + 1)(x - 1) = (2x + 1)(1 - x)$ och $R(x) = (2x + 1)(1 - x)/x$.

Vi får följande teckentabell:

	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$2x + 1$	$- - -$	0	$+ + +$	$+$	$+ + +$	$+$	$+ + +$
$1 - x$	$+ + +$	$+$	$+ + +$	$+$	$+ + +$	0	$- - -$
x	$- - -$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$	$+$	$+ + +$
$R(x)$	$+ + +$	0	$- - -$	ej def.	$+ + +$	0	$- - -$

Vi ser att $R(x) \geq 0$, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$. (För $x = 0$ är $R(x)$ ej definierad.)

Anmärkning. Man kan också skriva $R(x) = (-2)(x + 1/2)(x - 1)/x$ och bilda en teckentabell med faktorerna $(-2), (x + 1/2), (x - 1)$ och x. (Gör detta!)

Svar: Den givna olikheten gäller, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$.

OBS: Den givna olikheten (i exemplet ovan) får *inte* multipliceras med x, d.v.s. den får *inte* skrivas $1 \geq x(2x - 1)$. Värdet på x kan nämligen vara *negativt*.

Ö51. För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $1 \geq 2x^2 - x$ (b) $x^2 + x < 1$ (c) $x^2 + 1 \leq x$ (d) $x^2 > 2x - 1$
(e) $x^3 + 2x > 3x^2$ (f) $6x^3 < 17x^2 + 4x - 3$ (g) $x + 3 \geq \dfrac{2x}{x - 2}$
(h) $(x - 1)^2 \leq \dfrac{3}{x + 1}$ (i) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{2}{x}$ (studera först de båda olikheterna var för sig).

13 n:te roten ur ett reellt tal. Potenser med rationell exponent.

Definition:

Med $\sqrt[n]{b}$ menas den reella (och *positiva*, om $n = 2m$ är *jämnt*) lösningen till $x^n = b$, d.v.s. $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt, har då följande (reella) lösningar:

1) $x = \sqrt[n]{b}$, om $n = 2m + 1$ är ett udda (positivt) heltal,

2) $x = \pm\sqrt[n]{b}$, där $\sqrt[n]{b} \geq 0$, om $b \geq 0$ och $n = 2m$ är ett jämnt (positivt) heltal.

Dessutom har $x^n = b$ alltid *komplexa* lösningar, om $n > 2$, $b \neq 0$. Om n är jämnt och $b < 0$, så saknar $x^n = b$ reella lösningar och $\sqrt[n]{b}$ är *inte definierat*. För *udda* $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{-b} = -\sqrt[n]{b}$.

Definition:

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}, \text{ och (för } b > 0) \; b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Exempelvis gäller för den vanliga *kvadratroten*, att

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2} \quad \text{för} \quad b \geq 0$$

Man kan visa, att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent $x = \dfrac{m}{n}$ för $b > 0$ satisfierar de *allmänna potens- (eller exponential-)lagarna*:

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}, \; b^x/b^y = b^{x-y}, \; 1/b^y = b^{-y}, \; (b^x)^y = b^{xy},$$
$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \text{och} \quad (a/b)^x = a^x/b^x.$$

Det är samma lagar som för heltalsexponenter. För *n:te rötter* gäller då (för $b > 0$) bl.a. följande räkneregler:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[mn]{b} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}\,(= b^{\frac{1}{mn}}) \qquad (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}\,(= b^{\frac{m}{n}}),$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}.$$

För uttrycken $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a+b}$ och $\sqrt[n]{a-b}$ finns inga allmänna formler. Exempelvis är i allmänhet $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, (alltför vanligt *fel* att tro motsatsen!).

Exempel:

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{1/3})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt[2n]{x^2} = \sqrt[n]{\sqrt{x^2}} = \sqrt[n]{|x|}$

Ö52. Förenkla

(a) $27^{1/3}$ (b) $4^{-0,5}$ (c) $(\sqrt{8})^{2/3}$ (d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ (e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$

(f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$ (g) $(0,0016)^{-0,25}$

Ö53. Förenkla

(a) $\sqrt[6]{9}$ (b) $\sqrt[6]{8}$ (c) $\sqrt[3]{-24}$ (d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ (e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$

(f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ (g) $4/\sqrt[3]{16}$ (h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

Ö54. Bestäm de *reella* lösningarna till

(a) $x^8 = 16$ (b) $x^5 = 243$ (c) $64x^6 - 27 = 0$

(d) $x^3 + 8 = 0$ (e) $x^4 + 8 = 0$

Ö55. Förenkla (och ange definitionsmängd):

(a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ (b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ (c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$ (d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$

(e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ (f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

14 Allmänna potenser (Potens- och exponentialfunktioner)

Vi har ovan definierat vad som menas med uttrycket b^x, då $b > 0$ och $x = \dfrac{m}{n}$ är ett rationellt tal. Man kan allmännare definiera uttrycket b^x för $b > 0$ och alla reella x, så att *potens- och exponentiallagarna* gäller (för a och $b > 0$):

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y, \quad b^{x-y} = b^x/b^y, \quad b^{-y} = 1/b^y, \quad b^{x\cdot y} = (b^x)^y,$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad a^x/b^x = (a/b)^x$$

b^x kallas för en *potens* av b, b kallas *bas* och x kallas *exponent*.

OBS: Man skiljer på potens- och exponentialfunktioner:

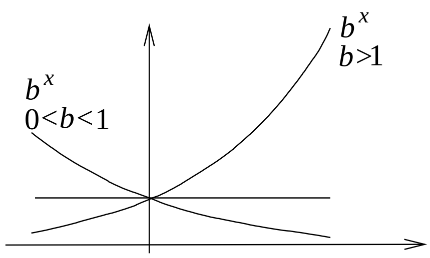
Potensfunktion: $f(x) = x^a$ (x=variabel, a=konstant)
Exponentialfunktion: $f(x) = b^x$ (x=variabel, b=konstant>0).

OBS:

a) $b^x > 0$ för alla x, d.v.s. kurvan $y = b^x$ ligger ovanför x-axeln,

b) $b^0 = 1$, d.v.s. $y = b^x$ går genom punkten $(x, y) = (0, 1)$ för alla $b > 0$,

c) $y = f(x) = b^x$ är $\begin{cases} \text{växande (för växande } x\text{), om } b > 1 \\ \text{avtagande (för växande } x\text{), om } 0 < b < 1. \end{cases}$



Av speciellt intresse är *den naturliga* exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^x \quad \text{med basen} \quad e = 2,71828\ldots.$$

(Tangenten till $y = e^x$ i punkten $(x, y) = (0, 1)$ har riktningsvinkeln 45°.) För e^x gäller alltså att

$$e^0 = 1, \quad e^x > 0 \text{ för alla } x, \quad e^x \text{ växande för alla } x$$

samt *exponentiallagarna*:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^{x-y} = e^x/e^y, \quad e^{-y} = 1/e^y \text{ och } e^{x \cdot y} = (e^x)^y$$

OBS: e^{x+y} är (i allmänhet) *inte* lika med $e^x + e^y$. (Alltför vanligt fel att tro motsatsen). Exempelvis är, för $x = y = 0$, $e^{x+y} = e^0 = 1$ men $e^x + e^y = e^0 + e^0 = 2$.

Exempel: (förenkla): $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 3^2 = 9$.

Exempel: Lös ekvationen $2^x + 2^{x-1} = 6$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $2^{x-1}(2 + 1) = 6$, d.v.s. $2^{x-1} = 2$, varför $x - 1 = 1$, d.v.s. $\underline{\underline{x = 2}}$.

(Alternativ lösningsmetod: Sätt $2^x = z$. Genomför räkningarna!)

Exempel: Bestäm reella lösningar till ekvationen $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

Lösning: Sätt $e^x = z$. Då är $e^{2x} = (e^x)^2$ och vi får ekvationen $z^2 + z - 2 = 0$ med lösningar $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, d.v.s. $z_1 = 1$ och $z_2 = -2$.

Fall 1: $e^x = z_1 = 1 = e^0$ ger $x_1 = 0$.

Fall 2: $e^x = z_2 = -2$ är en orimlighet, då $e^x > 0$ för alla reella x.

Svar: Ekvationen har den reella lösningen $x_1 = 0$.

Ö56. Förenkla

(a) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ (b) $e^{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{8}} \cdot e^{-\sqrt{18}}$ (c) $8^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{8}}/(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}$

Ö57. Visa att

(a) $2^{\sqrt{2}} < \sqrt{8}$ (b) $2^{\sqrt{2}} > \sqrt[5]{128}$ (c) $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{8}} > 4^{2,1}$

Ö58. Bestäm reella lösningar till

(a) $2^x = 64$ (b) $4^x = 8$ (c) $4^x = -8$

(d) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^x = 8$ (e) $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 45$ (f) $6 \cdot 4^x - 4^{x+2} = 16$

(g) $4 \cdot 8^x + 3 \cdot 2^{3x+1} = 5$

Ö59. Bestäm reella lösningar till

(a) $e^{2x} + 2 \cdot e^x = 3$ (b) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

(c) $2^{2x} + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 1$ (d) $2^x + 2^{3-x} = 9$ (e) $e^{3x} + 4e^{2x} - e^x - 4 = 0$