Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 120316

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Ida Säfström, 0703-088304
Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.
Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna **a)** $\int x \cos x^2 \, dx$, **b)** $\int_0^\pi x \cos x \, dx$, **c)** $\int \cos^2 x \, dx$. (3p)

2. Lös ekvationen $y' = -y + 1, \; y(0) = 2$. (3p)

3. Lös ekvationen $y'' - 4y' + 3y = 2e^x, \; y(0) = y'(0) = 0$. (3p)

4. Beräkna den volym som erhålls då området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av $y = x^2, \; y = 0$ och $x = 2$, roteras kring **a)** x-axeln, **b)** y-axeln. (3p)

5. Beräkna gränsvärdet (3p)
$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{3 \arctan x - \arctan(3x)}.$$

6. Beräkna $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, där $a, \; b$ konstanter skilda från 0. (3p)

7. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst. En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg jäst per minut. (4p)
   (a) Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,2. Bestäm mängden jäst som funktion av tiden (minuter).
   (b) Går det att välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant? Hur ska man i så fall välja?

8. Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (3p)

vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$