Lösningsförslag MMGK11, del 1, 130218

1) a) $\dfrac{x(x^2+y^2-2xy)(x+y)}{x(x^2-y^2)} = \dfrac{x(x-y)^2(x+y)}{x(x-y)(x+y)} = x-y$ b) $\dfrac{|-2|\,16}{(-1)^3 2^3} = \dfrac{2\cdot 2^4}{(-1)^3 2^3} = -2^2 = -4$

c) $(x+y)^3-(2x)^3 \equiv p(x) = \left(\begin{array}{c}\text{enl. faktorsatsen}\\ \text{då } p(y)=0\end{array}\right) = (x-y)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-ay)x^2+(c-by)x-yc$

Vidare är $(x+y)^3-(2x)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-8x^3 = -7x^3+3yx^2+3y^2x+y^3$ och identifiering av koefficienter ger $a=-7$, $b-ay=3y$, $c-by=3y^2$ som ger $a=-7$, $b=-4y$, $c=-y^2$ så att $\dfrac{(x+y)^3-(2x)^3}{x-y} = \dfrac{(x-y)(-7x^2-4yx-y^2)}{x-y} = -7x^2-4yx-y^2$

---

(2) a) Ja, ty kont. i alla punkter i definitionsmängden b) Nej, ty $p(2)\neq 0$ c)

c) $\sqrt{x^2+5} = 2x-1 \Rightarrow x^2+5 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}=0 \Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=-7/3$ men man ser att då $2x_2-1<0$ så kan det ej vara lika med $\sqrt{x^2+5}>0$ $\therefore$ $x=2$ lösning

---

(3) a) Endast (ii) gäller. b) Nej, ty linjens riktningsvektor är ortogonal mot normalvektorn för planet; eller insättning av linjen ekv i planet har ingen lösn. c) Ja, de är inte parallella.

---

(4) $x+3-\dfrac{2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x-2)-2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-6}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-2} \geq 0$

x		-2		2		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-3)(x+2)}{x-2}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Svar: $-2\leq x<2$ eller $x\geq 3$

---

(5) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -1 & k\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 3 & k-2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k-2\end{array}\right)$ Vi ser att det finns endast lösning för $k=2$

$k=2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -7 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 0\end{array}\right)$

$x_3=s$, $x_2=-\frac{3}{2}x_3=-\frac{3}{2}s$, $x_1=\frac{7}{2}x_3+1=1+\frac{7}{2}s$

$\therefore$ lösningen är $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{7}{2}s\\ -\frac{3}{2}s\\ s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{s}{2}\begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix}$ $t\in$

---

(6) Sätt $t=\cos x \Rightarrow 4t^3-8(1-t^2)-t+6=0 \Leftrightarrow 4t^3+8t^2-t-2=0=(t+2)(4t^2-1)$

$\therefore t_1=-2$, $t_{2,3}=\pm\frac{1}{2}$ $\cos x=-2$ har ingen lösn. och $\cos x=\pm\frac{1}{2}$ har lösn.

$x=\pm\frac{\pi}{3}+n2\pi$ eller $x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi$ som också kan skrivas $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$

---

(7) $A=(1,2,3)$, $B=(3,2,1)$ $C=(4,3,2)$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,2,1)-(1,2,3)=(2,0,-2)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4,3,2)-(1,2,3)=(3,1,-1)$ Normal $n=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,-2,1)$

$\therefore$ planets ekv. $x-2y+z=d=(\text{sätt in } A)=1-2\cdot 2+3=0$

$\therefore$ — " — $x-2y+z=0$ Vi ser att punkten $(1,1,1)$ ligger i planet så dess avstånd är 0. Linjen $(x,y,z)=(1,3,-1)+t(1,-2,1)$ är vinkelrät mot planet och går genom punkten $P=(1,3,-1)$ Insättning i planets ekv. ger $0=1+t-2(3-2t)+(-1+t)$

$\Rightarrow t=1$ så linjen skär planet i $(1,3,-1)+(1,-2,1)=(2,1,0)=Q$ Alltså är $(1,3,-1)$:s avstånd till planet $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|=|(2,1,0)-(1,3,-1)|=|(1,-2,1)|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\underline{\sqrt{6}}$