MMGK11, 130306

Lösningar (av [illegible])

1. a) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = -\dfrac{\cancel{y-x}}{x(\cancel{y-x})} = -\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}{\frac{1}{b}-\frac{b}{a^2}} = \dfrac{\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ba^2}} = \dfrac{(a+b)^{\cancel{2}}}{\cancel{ab}} \cdot \dfrac{a^2\cancel{b}}{(a-b)\cancel{(a+b)}} =$

$= \dfrac{a(a+b)}{a-b}$

c) $\dfrac{12x^4-2x^5-18x^3}{6x^3+x^4-x^5} = \dfrac{\cancel{-x^3}2(x^2-6x+9)}{\cancel{-x^3}(x^2-x-6)} = 2\,\dfrac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}(x+2)} =$

$= 2\,\dfrac{(x-3)}{(x+2)}$

2. a) $\dfrac{\ln x}{\sin^2 x-1}$ är kontinuerlig i hela sin definitions mängd, alltså i $]0,\infty[\setminus \{x;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n$

b) fall $-2 < x$

$|x+2|+|x-1| = -(x+2)-(x-1) = -2x-1 = k$

har maximalt en lösning för varje k.

fall $-2 \le x < 1$

$|x+2|+|x-1| = x+2-(x-1) = 3 = k$

har oändligt många lösningar för $k=3$ och ingen lösning för $k=1,4$

fall $1 \le x$

$|x+2|+|x-1| = x+2+x-1 = 2x+1 = k$

har maximalt en lösning för varje k.

Svar, det finns oändligt många lösningar för $k=3$

c) $\frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{3x} + \frac{3x+1}{1-x^2} = \qquad x \neq \pm 1, \quad x \neq 0$

$\frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{3x} - \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} =$

$\frac{5 \cdot 3x \cdot (x+1)}{2(x^2-1) \cdot 3x} - \frac{2(x^2-1)}{2(x^2-1)3x} - \frac{(3x+1)2 \cdot 3x}{(x^2-1) \cdot 2 \cdot 3x} =$

$= \frac{15x^2 + 15x - (2x^2-2) - (18x^2+6x)}{6x(x^2-1)} = 0 \Rightarrow$

$15x^2 + 15x - 2x^2 + 2 - 18x^2 - 6x = 0$

$\Rightarrow -5x^2 + 9x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{40}{100}} = \frac{9}{10} \pm \frac{11}{10} \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{5}$

3. a) $(1,-1,2) = (1,-1,2) + 0 \cdot (-2,1,-1)$

$(5,-3,4) = (1,-1,2) - 2(-2,1,-1)$

$(-3,2,4) \neq (1,-1,2) + t(-2,1,-1)$ ty

$-3 = 1 - 2t \Rightarrow t = 2$

$2 \neq -1 + 2$

Svar: i) & ii) ligger på linjen, men ej iii)

b) 2 plan skär varandra omm deras normalvektorer inte är parallella

$\Pi_1: -x + 3y - 2z = 2 \Rightarrow n_1 = (-1, 3, -2)$

$\Pi_2: 2x + y - z = 1 \Rightarrow n_2 = (2, 1, -1)$

$n_1 \neq t n_2$ alltså skär de varandra

3. c) 2 vektorer $u, v \in \mathbb{R}^2$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$ om de inte är parallella, alltså om $u \neq tv$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

$$(-12, 24) = t(3, -6)$$

$$-12 = 3t \Rightarrow t = -4$$

$$24 = (-6)(-4) = 24$$ ja, alltså

är de parallella och ingen bas.

4.

$$x + 3 \geq \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow x + 3 - \frac{2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+3)(x-2) - 2x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x-2} \geq 0$$

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<2$	$x=2$	$2<x<3$	$x=3$	$3<x$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)}$	$-$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$

olikheten gäller för

$$-2 \leq x < 2 \quad \& \quad 3 \leq x$$

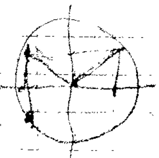
5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & k-2 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

om $k \neq 2$ saknar systemet lösning

$$k = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. a) $4\sin(2x+1)=2 \Rightarrow \sin(2x+1)=\frac{1}{2}$



$$\Rightarrow 2x+1=\frac{\pi}{6}+2\pi n \qquad 2x+1=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

$$2x=\frac{\pi}{6}-1+2\pi n \quad \& \quad 2x=\frac{5\pi}{6}-1+2\pi n$$

$$x=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}+\pi n \qquad x=\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}+\pi n$$

b) $\cos 3x+\cos x=0$

$$\cos 3x=-\cos x=\cos(\pi+x)=\cos(\pi-x)$$

$$3x=\pi+x+2\pi n \qquad 3x=\pi-x+2\pi n$$

$$2x=\pi+2\pi n \qquad 4x=\pi+2\pi n$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n \qquad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$$

7. En parametrisering av planet fås av

$(x,y,z)=P+su+tv$, där P är en punkt och u & v är vektorer parallella med planet.

tag två punkter på linjen säg:

$A=(1,2,3)$ & $B=(1,2,3)+1(2,0,-2)=(3,2,1)$

Låt P vara punkten som fås i uppgiften:
$P=(4,3,2)$. Vi låter

$$u=\vec{PA}=(1,2,3)-(4,3,2)=(-3,-1,1)$$

$$v=\vec{PB}=(3,2,1)-(4,3,2)=(-1,-1,-1)$$ Det ger

$$(x,y,z)=(4,3,2)+s(3,1,-1)+t(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x=4+3s+t \\ y=3+s+t \\ z=2-s+t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y=3+s+t \\ +(z=2-s+t) \\ \hline y+z=5+2t \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3y=9+3s+3t \\ -(x=4+3s+t) \\ 3y-x=5+2t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (y+z=5+2t) \\ -(3y-x=5+2t) \\ y+z-3y+x=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{x-2y+z=0}$$ planets ekvation.

punkten $(1,1,1)$ ligger i planet:

$1\cdot 1 - 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0$

punkten $(1,3,-1)$:

$(1,3,-1) + tn = Q \in$ planet

$n = (1,-2,1)$ (ses lätt på planets ekv.)

då ges avstånde av $|tn|$ där n är normalen.

$(1,3,-1) + t(1,-2,1) = (1+t, 3-2t, t-1)$

eftersom $Q \in$ planet måste den uppfylla

$(1+t) - 2(3-2t) + (t-1) = 0$

$-6 + 6t = 0 \Rightarrow t = 1$

$\therefore |tn| = |(1,-2,1)| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

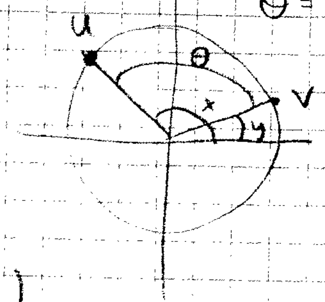
8.

Skalärprodukten definieras som

$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$ där θ är vinkeln mellan u & v

$\theta = x - y$

men kan även fås av



$u \cdot v = u_1 u_2 + v_1 v_2$

Låt $u = (\cos x, \sin x)$ $v = (\cos y, \sin y)$

$u \cdot v = |u||v| \cos(\theta) = \cos(x-y)$

$u \cdot v = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

OBS!!!

fel i uppgiften.