Lösningar till Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del1, 2013-06-07

1. **a)** kvoten $= \dfrac{5\cdot 3^3|-3|}{(-1)^3 3^3\cdot 9\cdot 2\cdot 10} = -\dfrac{1}{12}$, **b)** kvoten $= \dfrac{x-y}{x(y-x)} = \dfrac{x-y}{-x(x-y)} = -\dfrac{1}{x}$, **c)** kvoten $= \dfrac{x(x^2+y^2-2xy)}{x(x^2-y^2)}(x+y) = \dfrac{(x-y)^2(x+y)}{(x-y)(x+y)} = (x-y)$.

2. **a)** En funktion är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd. Den givna funktionen är en sammansättning av kontinuerliga funktioner och en sådan är då kontinuerlig. **b)** Likheten tolkas som ett avstånd och är då $\Leftrightarrow 3-3=x^2$ eller $x^2=3+3 \Leftrightarrow 0=x^2$ eller $x^2=6 \Leftrightarrow x=0,\ \pm\sqrt{6}$. **c)** $\sqrt{2x+143}=x \Rightarrow 2x+143=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-143=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=-11,\ 13$. Insättning av $x=-11$ i ekvationen ger att roten är negativ; men roten är (per definition) alltid positiv, så $x=-11$ är en falsk rot; alltså inte en rot till den ursprungliga ekvationen.

3. **a)** Ja, standardformel; additionsformeln för cosinus. **b)** Insättning ger $2\cdot 1-2+3=3\neq 4$ så den givna punkten ligger ej i det givna planet. **c)** Standard ON-basen i $\mathbb{R}^3$ ges av $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)$ (de utgör en bas ty respektive ortsvektorer ligger inte i ett plan). Den givna uppsättningen är $e_2,\ e_1,\ -e_3$ och de ligger alltså inte heller i ett plan och utgör därför en bas.

4. Olikheten $\Leftrightarrow x+3-\frac{2x}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow x+3-\frac{2x}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2)-2x}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x-2}\geq 0$. Teckenstudietabell

x		-2		2		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$

ger $x\in[-2,2)$ eller $x\geq 3$.

5. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & k\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & k\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\boxed{-2}\ \boxed{-1}\\ \hookleftarrow\\ \quad\hookleftarrow\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -3 & k-2\\ 0 & -1 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \boxed{-1}\ \boxed{1}\\ \quad\hookleftarrow\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2-k\\ 0 & 0 & 0 & 2-k\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \boxed{-1}\ \boxed{1}\\ \quad\hookleftarrow\end{array}$$

varav vi ser från tredje raden (som ju utläses $0x_1+0x_2+0x_3=2-k$) att lösning endast finns för $k=2$ och den lösningen löser då $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2-k\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\hookleftarrow\\ \boxed{-2}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0\end{array}\right)$$ med lösning $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$; dvs oändligt många lösningar (för $k=2$; annars ingen lösning); en lösning för varje värde på $s\in\mathbb{R}$.

6. Låt $t=\cos x$. Vi får då mha trigettan att $t^3+3(1-t^2)-4t+9=0 \Leftrightarrow t^3-3t^2-4t+12=0$. Vi ser att $t=2$ är en lösning och mha faktorsatsen får vi $t^3-3t^2-4t+12=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-t-6)=0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t-3)=0$. De enda möjliga lösningarna för x uppfyller alltså $\cos x=t$ där $t=-2,\ t=2$ eller $t=3$ men för ingen av dessa ekvationer finns lösning x då ju $-1\leq\cos x\leq 1$ för alla x. Alltså har den givna ekvationen ingen lösning.

7. Låt, i den ordning som ges i uppgiften, punkterna vara $P_1,\ P_2,\ P_3$ och P_4. Vektorerna $u=\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(1,0,-1)$ och $v=\overrightarrow{P_1P_3}=(-1,-1,0)$ är parallella med planet och $u\times v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,-1)$ så att t ex $n=(1,-1,1)$ är en normal för planet. Planets ekvation är alltså $x-y+z=D$ och insättning av t ex punkten P_1 ger att $D=1$ så att sökta planets ekvation är $x-y+z=1$. Vidare ser vi genom insättning av P_4 i ekvationen, att $1-(-1)+(-1)=1$ så att alltså P_4 ligger i planet och alltså har avståndet 0 till planet.

8. Vi tycker oss ju veta att denna form av additionssatsen för cosinus är felaktig; jmfr uppgift 3 a) ovan. Vi kan bevisa att den i uppgiften givna formeln ej är sann för alla reella tal x och y genom att specifikt välja $x=y=\frac{\pi}{2}$ ty då har vi $\cos(x-y)=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=\cos(0)=1\neq -1=0\cdot 0-1\cdot 1=\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}$.