Lösningsförslag MMGK11, del 1, 130823

1) a) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}} = \dfrac{\frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x+y}}}{\frac{\cancel{x-y}}{\cancel{x+y}}} = x+y$ b) $\dfrac{9\left(-\sqrt{(-3)^2}\right)^1}{3^3} = \dfrac{-9\sqrt{9}}{3^3} = -\dfrac{9\cdot 3}{3^3} = -1$

c) $\dfrac{x^3-y^3}{y-x} = -\dfrac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{x-y}} = -(x^2+xy+y^2)$

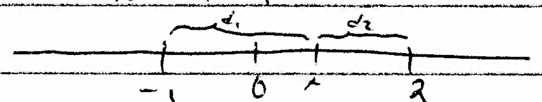
2) Vi ser att $p(1) = 5-4-1 = 0 \Rightarrow p(x) = (x-1)q(x)$ där $\text{grad}\, q = \text{grad}\, p - 1 = 4$
$\therefore$ Svar 3) samt (ovanstående)

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\therefore$ Unik lösning $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x =$ (enl. trig. ettan) $= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

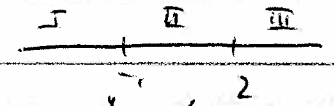
5) Linjens riktningsvektor $v = (1,-1,0)$ är normal till planet $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ planets ekv. är $x - y + 0z = D \Leftrightarrow x - y = D$. Punkten $(1,1,1)$ ligger i planet $\Rightarrow 1 - 1 = D = 0 \Rightarrow$ planets ekv. $x - y = 0$

6) $|x-2| + |x+1| = 3 \Leftrightarrow |x-2| + |x-(-1)| = 3 \Leftrightarrow$ avstånd mellan x och 2 + avstånd mellan x och -1 $= 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$ ty



$d_1 + d_2 = 3$

Man kan också dela in $\mathbb{R}$ i tre intervall



bestämda av "brytpunkterna" där absolutbeloppstermerna "inne" växlar tecken (I: $x \le -1$; II: $-1 \le x \le 2$; III: $x \ge 2$)
och studera uttrycket i dessa utan absolutbelopp:

I: $-(x-2) - (x+1) = 3 \Leftrightarrow -2x+1 = 3 \Leftrightarrow x = -1 \in$ I

II: $-(x-2) + x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x \in$ II $\Leftrightarrow -1 \le x \le 2$

III: $x - 2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \in$ III

Svar: $-1 \le x \le 2$

7) Vi ser att $p(x) = x^{31} + x^{30} - x^{29} - x^{28} - x^4 + 2x^2 - 1$ har nollställe ± 1 precis som nämnaren $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$. Alltså gäller $p(x) = (x-1)(x+1)q(x)$ så att vi kan förkorta $\frac{p(x)}{x^3+x^2-x-1} = \frac{q(x)}{x+1}$. Om nu $p'(-1) = 0$ så har vi också $p'(x) = (x+1)q_1(x)$ och $p(x) = (x+1)q_2(x)$ så att $p'(x) = q_2(x) + (x+1)q_2'(x)$ vilket ger $(x+1)q_1(x) = p'(x) = q_2(x) + (x+1)q_2'(x) \Rightarrow q_2(x) = (x+1)q_1(x) - (x+1)q_2'(x)$
$= (x+1)(q_1(x) - q_2'(x))$ så att $p(x) = (x+1)q_2(x) = (x+1)(x+1)(q_1(x) - q_2'(x)) = (x+1)^2(q_1(x) - q_2'(x))$
och alltså kan vi skriva $p(x) = (x+1)^2(x-1)q_3(x)$ (då ju $p(1) = 0$) så att vi kan förkorta alla faktorer i nämnaren och divisionen går jämnt ut.

8) Se kursboken