Lösningsförslag MMGK11, del 1, Naturvetenskapsmatematik 140217

1a) $\dfrac{\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}} = \dfrac{\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}} = 1$

b) kvoten $= \dfrac{x^{1/2}u^{-2/5}}{u^{1/2}x^{1/2}} = u^{-2/5-1/2} = u^{-4/10-5/10} = u^{-9/10}$

c) $\dfrac{\sqrt{(x-y)^2(x+y)^2}}{(x+y)} = \dfrac{|x-y||x+y|}{x+y} = (x,y>0) = \dfrac{|x-y|(x+y)}{x+y} = |x-y|$

2a)

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x^2-1 \,\big)\, 2x^3+x^2+1 \\ -(2x^3-2x) \\ x^2+2x+1 \\ -(x^2-1) \\ 2x+2 \end{array}$$

∴ $\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{(2x+1)(x^2-1)+2(x+1)}{x^2-1} = 2x+1+\dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 2x+1+\dfrac{2}{x-1}$

b) $2x^2+x-1 = 2(x^2+\frac12 x)-1 = 2(x^2+2\cdot\frac14\cdot x)-1 = 2\left((x+\frac14)^2-(\frac14)^2\right)-1 = 2(x+\frac14)^2-\frac18-\frac88 = 2(x+\frac14)^2-\frac98$

$\geq -\frac98$ som är minsta värdet (och antas för $x=-1/4$).

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&-1&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&-1&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&-1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&1&1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right) \Rightarrow$ lösning $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

4) $\dfrac{x^2+7x+6}{(x+1)(x+2)} < x \iff \dfrac{x^2+7x+6}{(x+1)(x+2)} - x < 0 \iff \dfrac{-(x^3+2x^2-5x-6)}{(x+1)(x+2)} < 0 \iff \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2+x-6)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} > 0 \iff \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+2} > 0$

| $x$ | | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\frac{(x-2)(x+3)}{x+2}$ | $-$ | 0 | $+$ | $\nexists$ | $-$ | 0 | $+$ |

$\Rightarrow$ Svar: $-3<x<-2$ eller $x>2$

5a) $\sin(2x+1) = 1/2 \Rightarrow 2x+1 = \frac{\pi}{6}+n2\pi$ eller $2x+1 = \pi-\frac{\pi}{6}+n2\pi = \frac{5\pi}{6}+n2\pi \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{12}-\frac12+n\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{12}-\frac12+n\pi$

b) $\cos 3x = \cos x \iff 3x = x+n2\pi$ eller $3x = -x+n2\pi \iff x = \frac{n\pi}{2}$

6) $\cos(2\arcsin\frac13) = \cos(2\alpha)$ om $\alpha = \arcsin\frac13 \iff \sin\alpha = \frac13,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2(\frac13)^2 = 1-\frac29 = \frac{9-2}{9} = \frac79$

7) a) $x-y+2z=D$, $D = 1-0+2(-1) = -1$ ∴ $x-y+2z=-1$

b) normal $n = (1,-1,2)$. Linjen genom origo med riktningsvektor vinkelrät mot planet i den punkt som är närmast origo: Linjen är $(x,y,z) = (0,0,0)+t(1,-1,2) = (t,-t,2t)$. Skärning med planet då $1 = 1\cdot t-1(-t)+2(2t) = 6t \Rightarrow t = 1/6 \Rightarrow$ skärpunkt är $\frac16(1,-1,2)$

c) Planen parallella med $x-y+2z=1$ ges av $x-y+2z=D$, $D\in\mathbb{R}$. Dessa skär linjen $(x,y,z)=t(1,-1,2)$ på när $6t=D \iff t=D/6$ ∴ skärningspunkten är $\frac{D}{6}(1,-1,2)$ och dess avstånd från origo är $\sqrt{(\frac{D}{6}-0)^2+(-\frac{D}{6}-0)^2+(\frac{2D}{6}-0)^2} = \sqrt{\frac{6D^2}{36}} = \frac{|D|}{\sqrt6} = \sqrt{24} \Rightarrow |D| = \sqrt6\cdot2\sqrt6 = 12 \Rightarrow D = \pm12$

∴ Planen är $x-y+2z=\pm12$

8) Se kursbok.