MMGK11, del 1, Nätverksmatematik A1 140822

1 a) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{ad+bc}{b^2d^3}} \cdot \dfrac{b^2d^3}{b^2d^3} = \dfrac{\frac{ad+bc}{bd}\cdot b^2d^3}{ad+bc} \cdot \dfrac{\frac{1}{ad+bc}}{\frac{1}{ad+bc}} = \dfrac{\frac{(ad+bc)b^2d^3}{bd(ad+bc)}}{1} = \underline{\underline{bd^2}}$

b) $\dfrac{a^3(\sqrt{b})^3(\sqrt{a})^{-1}}{(\sqrt{a})^5\, b^{-1/2}} = a^{3-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}\, b^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = a^0 b^{4/2} = \underline{\underline{b^2}}$

c) $\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+2x-3} = \dfrac{(x-1)\,p_1(x)}{(x-1)\,p_2(x)} = \dfrac{(x-1)(x^2+x-6)}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+3)}} = \underline{\underline{x-2}}$

2)
$$\begin{array}{r|l} & 3x-8 \\ x^2+2x-3 & 3x^3-2x^2+x-1 \\ & -(3x^3+6x^2-9x) \\ & -8x^2+10x-1 \\ & -(-8x^2-16x+24) \\ & 26x-25 = \text{rest} \end{array}$$

$\Rightarrow 3x^3-2x^2+x-1 = (3x-8)(x^2+2x-3)+26x-25$

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&-1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&-1&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&2\\ 0&1&-1&1\\ 1&0&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&2\\ 0&1&-1&1\\ 0&-1&2&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&2\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&1&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

4) $2x-1 \le \frac{1}{x} \iff 2x-1-\frac{1}{x} \le 0 \iff \frac{x(2x-1)-1}{x} \le 0 \iff \frac{2x^2-x-1}{x} \le 0 \iff \frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x} \le 0$

Teckenstudietabell

x		$-1/2$		0		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow (-\infty, -\frac{1}{2}]$ eller $(0,1]$

5) a) Sätt $y = \sin x \Rightarrow y^2+y-2=0 \Rightarrow y=1,\ y=-2 \Rightarrow \sin x = -2,\ \sin x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}+n2\pi}}$

b) Sätt $y = e^x \Rightarrow y^2-3y+2=0 \Rightarrow y=1,\ 2 \Rightarrow e^x=1,\ e^x=2 \Rightarrow x=0$ eller $x=\ln 2$

c) $\cos x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}-\cancel{x}+n2\pi \\ x = -(\frac{\pi}{2}-x)+n2\pi \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}+n2\pi}}$

6) Låt $\alpha = \arcsin\frac{1}{3} \iff \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{3} \\ |\alpha| \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\therefore \cos(2\arcsin\frac{1}{3}) = \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 7/9$

7) a) Låt $A=(1,0,0)$, $B=(1,1,1)$, $C=(0,0,1) \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = (1,1,1)-(1,0,0) = (0,1,1)$, $\vec{AC} = \ldots = (1,1,0)$

$\therefore n \,//\, \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{AB}\times\vec{AC} = (-1, -(-1), -1) = -(1,-1,1) \Rightarrow$ välj $n = (1,-1,1)$

$\therefore$ Planets ekv $x-y+z=D$ och t.ex. $C \in$ planet $\Rightarrow D=1$ $\therefore$ planets ekv $\underline{\underline{x-y+z=1}}$

b) O och $(1,2,2)$ tillhör planet. c) $\text{dist} = |\text{Proj}_n(\vec{P_0P})|$ där P_0 = t.ex. $= C$ och $P=(1,-1,1)$. Så $\text{dist} = \left|\frac{n\cdot\vec{P_0P}}{|n|^2}\cdot n\right| = \frac{|n\cdot\vec{P_0P}|}{|n|} = \frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Alternativ lösning: Linjen genom P_0 och P med riktningsvektorn n skär planet då $(x,y,z) = (1,-1,1)+s(1,-1,1) = (1+s,-1-s,1+s)$ skär planet dvs då $1+s-(-1-s)+1+s=1$ $\iff s=-2/3$ $\therefore$ Skärningspunkt är $\frac{1}{3}(1,-1,1)$ och avståndet mellan denna skärningspunkt och punkten P är $2/\sqrt{3}$)

8) Se kursboken.