

Skrivtid: 9.00-13.00

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Vilhelm Adolfsson, 0709927772

1. Beräkna **a)** $\int x \cos x^2 dx$, **b)** $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$, **c)** $\int \cos \sqrt{x} dx$. (3p)

2. Lös ekvationen $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$. (3p)

3. Beräkna gränsvärdet (3p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}.$$

4. Finn lösningar till ekvationen $y' = -y^2 + 1$, sådana att **a)** $y(0) = 1$, **b)** $y(0) = -1$. (4p)

5. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst. En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg jäst per minut. Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,4. Hur ska man välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant? (3p)

6. Beräkna längden av kurvbågen $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. (3p)

7. Beräkna $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$. (3p)

8. Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (3p)

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$