Lösningar till Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 2013-03-21

1. **a)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\,dx = [t = x/\sqrt{2},\ dx = \sqrt{2}dt,\ 0 \to 0,\ 1 \to 1/\sqrt{2}] = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan t]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(1/\sqrt{2})$, **b)** $\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = [t = \cos x, dt = -\sin x dx] = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C$, **c)** $\int x\ln x\,dx = [\text{PI}] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

2. Linjär, första ordningen. IF: $e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$ som ger att ekvationen är ekvivalent med $\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = 0 \cdot e^{2x} = 0$. Integration ger $e^{2x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{x^2}y)\,dx = \int 0\,dx = C$ som ger att $y = Ce^{-2x}$. Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger att $C = 2$ och alltså är sökt lösning $y = 2e^{-2x}$.

3. Linjariteten ger att $y = y_p + y_h$. Kar. ekv. är $r^2 + 4 = 0$ med rötter $r_{1,2} = \pm 2i$. Detta ger $y_h = \tilde{A}e^{-2ix} + \tilde{B}e^{2ix} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Ansätt $y_p = x^m(A\sin 2x + B\cos 2x)$ där $m = 0$ ej möjligt men $m = 1$ går bra. Derivering och insättning i ekv. ger $\sin 2x = y_p'' + 4y_p = 4A\cos 2x - 4B\sin 2x \Rightarrow A = 0,\ B = -1/4$. Sökt lösning är alltså $y = y_p + y_h = -\frac{x}{4}\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

4. Kar. ekv. $(r-1)(r-(-2)) = 0 = r^2 + r - 2 \Rightarrow y'' + y' - 2y = 0$ med lösning $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Vidare är $y_p = x^2$ lösning till $y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2$ som alltså är den sökta ekvationen.

5. Maclaurinutveckling ger $(1 - cosx)^2 = (cosx - 1)^2 = (1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) - 1)^2 = (-\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4))^2 = \frac{x^4}{4} - x^2\mathcal{O}(x^4) + (\mathcal{O}(x^4))^2 = \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6)$ och $x(\sin x - x) = x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5) - x) = -\frac{x^4}{3!} + \mathcal{O}(x^6)$. Vi får då $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin x - x)}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4(-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2))}{x^4(\frac{1}{4} + \mathcal{O}(x^2))} = \frac{-\frac{1}{6}+0}{\frac{1}{4}+0} = -\frac{2}{3}$

6. Bootstrapping. Låt $I \equiv \int \cos ax\sin bx\,dx = [\text{PI}] = \frac{\sin ax}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int \sin ax\cos bx\,dx = [\text{PI}] = \frac{1}{a}\sin ax\sin bx - \frac{b}{a}(-\frac{\cos ax}{a}\cos bx - \frac{b}{a}\int \cos ax\sin bx\,dx) = \frac{1}{a}\sin ax\sin bx + \frac{b}{a^2}\cos ax\cos bx + (\frac{b}{a})^2 I + C$. Alltså fås $(1 - (\frac{b}{a})^2)I = \frac{1}{a}\sin ax\sin bx + \frac{b}{a^2}\cos ax\cos bx$ så att $I = \frac{1}{a^2 - b^2}(a\sin ax\sin bx + b\cos ax\cos bx) + C$. Ett alternativ till bootstrapping är att istället använda produktformlerna för trigonometriska formler; $\cos u\sin v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) - \sin(u-v))$.

7. Derivering av likheten ger $\frac{2x}{2}y + \frac{x^2}{2}y' + e^{2\ln x}y\frac{1}{x} = 2x \Rightarrow y' + \frac{4}{x}y = \frac{4}{x}$. IF: $e^{\int \frac{4}{x}\,dx} = e^{4\ln x} = x^4$ ger $\frac{d}{dx}(x^4y) = 4x^3 \to x^4y = \int \frac{d}{dx}(x^4y)\,dx = \int 4x^3\,dx = x^4 + C$. Detta ger $y = 1 + \frac{C}{x^4}$ och då vi genom att sätta $x = e$ i ekvationen i uppgiften, får att $\frac{e^2}{2}y(e) + 0 = e^2$ så att $y(e) = 2$ erhålls $2 = y(e) = 1 + \frac{C}{e^4}$, d v s $C = e^4$. Sökt lösning är alltså $y = 1 + (\frac{e}{x})^4$.

8. Låt f på intervallet $[0,1]$ vara funktionen som är 0 för rationella tal och 1 för irrationella. Varje delintervall i en partition av intervallet kommer att innehålla både tal där funktionen är 0 respektive tal där funktionen är 1. Alla undersummor är då mindre än eller lika med noll och översummorna är större än eller lika med 1. Alltså finns det oändligt många tal mellan undersummorna och översummorna och inte bara ett enda unikt tal; integralen av funktionen på intervallet går alltså inte att definiera.