Lösningar till Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 2013-06-10

1. **a)** Integralen $= \int_0^1 \frac{1}{\cos^2(2x)}\,dx = [\frac{1}{2}\tan(2x)]_0^{\pi/8} = \frac{1}{2}(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$, **b)** Integralen $= \int \sin^2 x \sin x\,dx = [t = \cos x, dt = -\sin x dx] = -\int 1 - t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$, **c)** Integralen $= \int x\sin x\,dx =$ [PI] $= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$.

2. Linjär, första ordningen. IF: $e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$ som ger att ekvationen är ekvivalent med $\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = 0\cdot e^{2x} = 0$. Integration ger $e^{2x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{x^2}y)\,dx = \int 0\,dx = C$ som ger att $y = Ce^{-2x}$. Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger att $C = 2$ och alltså är sökt lösning $y = 2e^{-2x}$.

3. Linjariteten ger att $y = y_p + y_h$. Kar. ekv. är $r^2 + 4 = 0$ med rötter $r_{1,2} = \pm 2i$. Detta ger $y_h = \tilde{A}e^{-2ix} + \tilde{B}e^{2ix} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Ansätt $y_p = x^m(A\sin x + B\cos x)$ där vi kan välja $m = 0$. Derivering och insättning i ekv. ger $\sin x = y_p'' + 4y_p = 3A\sin x + 3B\cos x \Rightarrow A = 1/3,\ B = 0$. Sökt lösning är alltså $y = y_p + y_h = \frac{1}{3}\sin x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

4. Längden $= \int_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = [\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

5. Maclaurinutveckling ger $cosx - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)$. Vi får då att gränsvärdet är $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4))x}{x^2\sin x}$
$= (\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^2 \lim_{x\to 0}(\frac{x^2(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2))}{x^2})\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 1^2(-\frac{1}{2} + 0)\cdot\frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$

6. Bootstrapping. Låt $I \equiv \int \cos ax \sin bx\,dx =$ [PI] $= \frac{\sin ax}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int \sin ax\cos bx\,dx =$ [PI] $= \frac{1}{a}\sin ax\sin bx - \frac{b}{a}(-\frac{\cos ax}{a}\cos bx - \frac{b}{a}\int \cos ax\sin bx\,dx) = \frac{1}{a}\sin ax\sin bx + \frac{b}{a^2}\cos ax\cos bx + (\frac{b}{a})^2 I + C$. Alltså fås $(1 - (\frac{b}{a})^2)I = \frac{1}{a}\sin ax\sin bx + \frac{b}{a^2}\cos ax\cos bx$ så att $I = \frac{1}{a^2 - b^2}(a\sin ax\sin bx + b\cos ax\cos bx) + C$. Ett alternativ till bootstrapping är att istället använda produktformlerna för trigonometriska formler; $\cos u\sin v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) - \sin(u-v))$.

7. Vi har $xz = y$ och derivering ger $y' = z + xz'$ så att ekvationen transformeras till $xz' = \frac{1}{2z}$ som är separabel och vi får $\int 2z\,dz = \int \frac{dx}{x}$ med lösning $z^2 = \ln x + C$ och 'tillbakatransformation' till y ger $y^2 = x^2(\ln x + C)$ för $x > 0$.

8. Låt f på intervallet $[0,1]$ vara funktionen som är 0 för rationella tal och 1 för irrationella. Varje delintervall i en partition av intervallet kommer att innehålla både tal där funktionen är 0 respektive tal där funktionen är 1. Alla undersummor är då mindre än eller lika med noll och översummorna är större än eller lika med 1. Alltså finns det oändligt många tal mellan undersummorna och översummorna och inte bara ett enda unikt tal; integralen av funktionen på intervallet går alltså inte att definiera.