Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 140829

Skrivtid: 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Christoffer Standar, 0703-088304
Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.
Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna **a)** $\displaystyle\int_0^{\pi/10} \sin(5x)\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int x^3(1+x)\,dx$. (1+1+1p)

2. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + y = x$, $y(0) = 2$, b) Beräkna $y(1)$ för y som löser begynnelsevärdesproblemet $y' + \dfrac{2}{x}y = x^2$, $y(-1) = 0$. (2+2p)

3. Lös ekvationen $y'' + 2y' + y = x$. (3p)

4. Beräkna om möjligt gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^2 - x\ln(1+x)}$. (3p)

5. Ange definitionsmängden för funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+12}{2x-4}$. Bestäm eventuella asymptoter, lokala maxima och minima samt skissa kurvan $y = f(x)$. (3p)

6. Följande modell för tillväxt av till exempel en växt- eller djurpopulation är ofta använd: Låt antalet individer vid tiden t vara $y(t)$. Tillväxten styrs då av differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = ry(K-y)$, där r och K är positiva konstanter. Vid ett försök var antalet individer 10^4 vid tiden $t = 0$ och antalet var $2 \cdot 10^4$ vid tiden $t = 1$ samt 10^5 efter mycket lång tid. Vilka värden på r och K ges av försöket? (3p)

7. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst. En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg jäst per minut. (3p)
   (a) Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,2. Bestäm mängden jäst som funktion av tiden (minuter).
   (b) Går det att välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant? Hur ska man i så fall välja?

8. Härled informellt uttrycket för skivformeln för volymen vid rotatition runt x-axeln, samt också uttrycket för skalformeln vid rotation runt y-axeln. (3p)

vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$