MMGK11 del II 150608 1/4

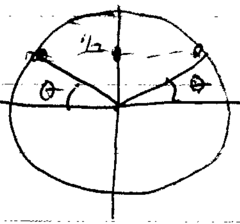
1a) $\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = \underline{\underline{x+y}}$

b) $\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\left(\frac{x-y}{x}\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \underline{\underline{\frac{x+y}{x-y}}}$

c) $\frac{\sqrt{6a^3}}{(4a^2)^{1/4}} = \frac{\sqrt{6}\,a^{3/2}}{\sqrt{2}\,a^{1/2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}\,a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3}\,a}}$

2) a) $3^x = 3\cdot 2^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{3} = 2^x \Leftrightarrow 3^{x-1} = 2^x \Rightarrow (x-1)\ln 3 = x\ln 2 \Rightarrow$
$x\ln 3 - x\ln 2 = \ln 3 \Rightarrow x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3 \Rightarrow \underline{\underline{x = \ln 3/(\ln 3 - \ln 2)}}$

b) $3\ln 2 + \ln(x-1) = \ln x + \ln 7 \Rightarrow e^{\ln 2^3} e^{\ln(x-1)} = e^{\ln x} e^{\ln 7}$
$\Rightarrow 8(x-1) = 7x \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$ som är lösn.

c) 

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ har lösningar $\theta = \frac{\pi}{6} + n2\pi$
eller $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi$ $\left(\text{dvs } \theta = \frac{5\pi}{6} + n2\pi\right)$

ci $5x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $5x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5}$ eller $x = \frac{7\pi}{6} + n\frac{2\pi}{5}$

3) a) Multiplicera med mgn $= (x-1)(x-2)(x+1) \Rightarrow$
$2(x+1)(x-2) + 2(x+1)(x-1) + 3(x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (7x-11)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 11/7$

b) $\sqrt{2x^2+7x+6} - x = 2 \Rightarrow 2x^2+7x+6 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ eller $x = -2$ och båda dessa ses genom prövning vara lösningar till det ursprungliga problemet $\sqrt{2x^2+7x+6} - x = 2$
(OBS: Vi har bara implikation mellan de två första utsagorna så man måste testa huruvida funna möjliga rötter är eller inte är lösningar till ursprungsproblemet.)

4) Vi ser att $x=1$ är en rot och faktorsatsen ger då $0 = x^3-5x^2+6x-2 = (x-1)(x^2-4x+2)$ så att om $x^2-4x+2=0$ gäller $x = 2\pm\sqrt{2}$.
Alltså är lösningarna $x = 0,\ 2\pm\sqrt{2}$

---

5) Punkter $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ som finns på graferna till linjen och cirkeln är lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x+1 \\ (x+2)^2+(y-3)^2 = 3^2 \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2+(x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2+8=9 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

som ger skärningspunkterna $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

---

6) Låt $P_1=(1,0,0)$, $P_2=(0,1,0)$, $P_3=(0,0,1)$, $v=(1,-2,1)$ och $Q_1=(1,2,-1)$, $Q_2=(1,1,-2)$.

a) Det sökta planet π:s normal kan ges av $n = \overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} =$
$$= (-1,1,0)\times(-1,0,1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-(-1),1) = (1,1,1) \Rightarrow$$
planet π:s ekv. är $x+y+z=D$ och t.ex. $P_1\in\pi$ ger $1+0+0=D$ så att $D=1$ och planets ekv. är $\underline{x+y+z=1}$

c) Vi ser att båda linjernas riktningsvektorer är v, och då $n\cdot v = 1\cdot1+1\cdot(-2)+1\cdot1 = 0$ och ingen av punkterna Q_1 och Q_2 är i planet π så skär ingen av linjerna planet π. (Alternativt, sök punkter som ligger både på en av linjerna och planet ger ekvationer som saknar lösning: t.ex. $1+t+2-2t-1+t=1 \Leftrightarrow 2=1$ ↯)

d) Linjen i b):s avstånd till planet π ges av avståndet mellan Q_1 och planet. Låt ℓ_1 vara linjen genom Q_1 och ortogonal mot planet π. Skärningspunkten $S_1 = (x_0,y_0,z_0) = Q_1 + tn = (1+t, 2+t, -1+t)$ uppfyller $1 = 1+t+2+t+(-1)+t = 3t+2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$ så att $S = \left(1-\frac{1}{3}, 2-\frac{1}{3}, -1-\frac{1}{3}\right) =$
$= \left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right) = Q_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)n \Rightarrow S_1 - Q_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)n \Rightarrow \overrightarrow{OS_1}-\overrightarrow{OQ_1} = \left(-\frac{1}{3}\right)n \Rightarrow$
$\overrightarrow{Q_1S_1} = \left(-\frac{1}{3}\right)n \Rightarrow \left|\overrightarrow{Q_1S_1}\right| = \left|\left(-\frac{1}{3}\right)n\right| = \frac{1}{3}|n| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ som

MMGK11, del 1, 150608 forts. 3/4

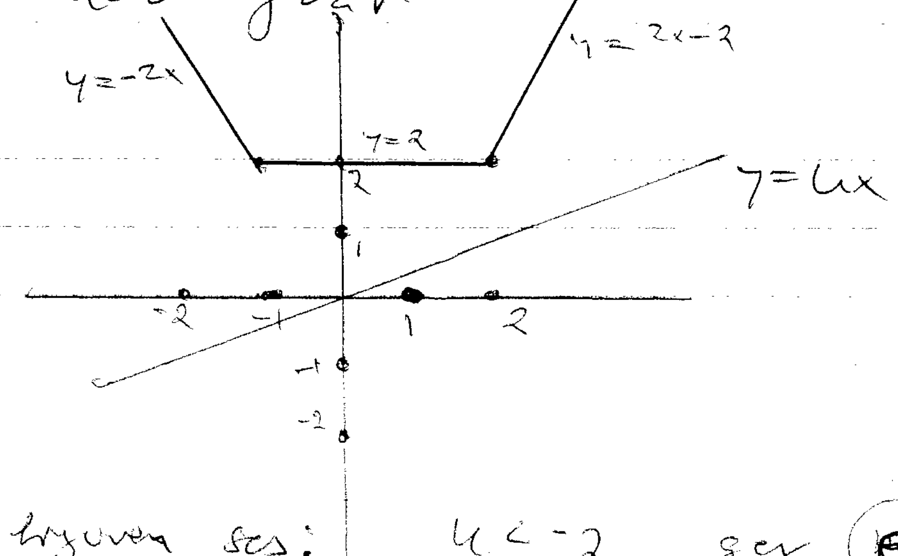
6d) forts.
alltså — är avståndet mellan linjen i b) och planet Π —
Pss blir detta avstånd —"— i c) —"— är
lika stort $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

---

7) Låt $y = kx$ representera $y = |x+1| + |x-2| - 1$ och uppgiften blir då att se för vilka eventuella $k \in \mathbb{R}$ dessa två grafer har precis en skärningspunkt.
Punkterna $x=-1$ och $x=2$ är brytpunkter för funktionen $y = |x+1|+|x-2|-1$ och dessa delar in $\mathbb{R}$, reella axeln, i tre delar

$$y = |x+1| + |x-2| - 1 = \begin{cases} -2x & x \le -1 \\ 2 & -1 \le x \le 2 \\ 2x-2 & 2 \le x \end{cases}$$

som har graf



Från figuren ses:

$k < -2$	ger	en	lösning
$k = -2$	—"—	oändligt många	—"—
$-2 < k < 1$	—"—	ingen	—"—
$k = 1$	—"—	en	—"—
$1 < k < 2$	—"—	två	—"—
$2 \le k$	—"—	en	—"—

Svar: $k < -2$, $k = 1$, $k \geq 2$ ger precis en lösning

8) a) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib$

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 \cancel{- iab + iba} - i^2 b^2 =$

$= a^2 - (-1) b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

b) $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{p}{2}x + q = 0$

$\Leftrightarrow$ (kvadratkomplettering) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

och då ekvationen $w^2 = c$ har lösningarna $w = \pm\sqrt{c}$ har vi

$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\Leftrightarrow$

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$