Naturvetarmatematik A1, del I, MMGK11, 150821

1a) $\frac{\sqrt{6^4}\;2^9}{(4^6)^{1/2}\;9^2} = \frac{6^2\cdot 2^9}{(2^2)^{6/2}(3^2)^2} = \frac{3^2\cdot 2^{11}}{2^6\,3^4} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}$

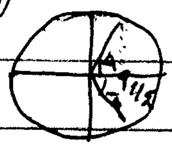
b) $\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-1} = \frac{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a-(a-b)}{a-b}} = \frac{2ab-(-2ab)}{(a+b)\,b} = \frac{4a}{a+b}$

c) $\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)(x-y)(x-y)}{(x-y)^2} = x+y$

2) a) $2^x = 4\cdot 2^{x-2} = 2^2\cdot 2^{x-2} = 2^{x-2+2} = 2^x \iff 2^x = 2^x$ sant $\forall x\in\mathbb{R}$

b) $3\ln 2+\ln(x-1) = \ln x+\ln 8 = \ln x+\ln 2^3 = \ln x+3\ln 2 \iff \ln(x-1)=\ln x$
så lösningar möjliga bara då $x>1$. För $x>1$ har vi
$\ln(x-1)=\ln x \iff \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=0 \iff \frac{x-1}{x}=1 \iff x-1=x \iff -1=0$ ej sant
så finns inga lösningar x

c) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$



$\therefore\; 2x-\frac{\pi}{2} = \pm\frac{\pi}{3}+n2\pi$

$\iff x = \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+n\pi = \begin{cases}\frac{5\pi}{12}+n\pi\\ \frac{\pi}{12}+n\pi\end{cases}$

3) a) $2x = 1+3+5+\dots+99 = \sum_{k=1}^{50} 2k-1 = 2\sum_{k=1}^{50}k-\sum_{k=1}^{50}1 =$
$= 2\,\frac{50(50+1)}{2}-50 = 50(50+1-1) = (50)^2 = 2500 \Rightarrow x = 1250$

b) (*) $2x+\sqrt{x^2+x}=1 \iff 1-2x=\sqrt{x^2+x} \Rightarrow x^2+x=\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2=(1-2x)^2=$
$=\left((-1)(2x-1)\right)^2=(-1)^2(2x-1)^2=(2x-1)^2=4x^2-4x+1 \iff x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$
$\iff x = -\frac{-5/3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{3}} = \frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$ Vi ser att
$-\frac{2}{3} = \frac{-5+\sqrt{1}}{6} < \frac{-5+\sqrt{13}}{6} < \frac{-5+\sqrt{16}}{6} < 0$ så $1+\frac{-5+\sqrt{13}}{6}>0$ så
är $x^2+x = x(x+1) < 0$ och alltså ej lösning till (*)

Naturvetenskaplig matematik A1 del I, MMGK11 150821 forts.

3) forts.) Vi ser att grafen för kurvorna $y = 1-2x$ och $y = \sqrt{x^2+x}$ har en skärningspunkt så (*) har en lösning som alltså inte kan vara $\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$. Svar: $\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$

4) Uppgiften innehöll tyvärr ett tryckfel; skulle ha varit $3x^{-2} + 18x^{-3} = 1+4x^{-1}$ (istf felens $3x^{-2} - 18x^{-3} = 1+4x^{-1}$). Denna har lösningen 2 och -3 (dubbelrot). Uppgiften utgår

5) $x+3 \geq \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow 0 \leq x+3-\frac{2x}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)-2x}{x-2} = \frac{x^2-x-6}{x-2} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$

Teckenstudietabell

x		-2		2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$	$-$	0	$+$	ξ	$-$	0	$+$

$\therefore$ Svar: $x \geq 3$ eller $-2 \leq x < 2$

6) a) Låt $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,-1)$. Då är vektorerna $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,1,0)-(1,0,0) = (-1,1,0)$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,0,-1)-(1,0,0) =$ $= (-1,0,-1)$ parallella med planet och en normal till planet ges av $n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1) \Rightarrow$ planets ekv $-x-y+z = \text{konst} \Leftrightarrow x+y-z = k$ och då $P_1 \in$ planet blir $k = 1+0-0 = 1$

$\therefore$ planets ekv $x+y-z=1$ b) Då riktningsvektorn $v = (1,-2,1)$ för linjen ej är ortogonal mot planets normal, då ju $n \cdot v = -1\cdot 1+(-1)(-2)+1\cdot 1 = 2 \neq 0$, så skär linjen planet. c) Ja, då de har samma normal så är de identiska eller har ingen punkt gemensam, och de har samma ekv. så är de identiska och skär alltså varandra

7) (*) $|x+1|+|x-2|+4 = 2x$ har brytpunkt -1 och 2 som delar in $\mathbb{R}$ i tre delintervall $I = (-\infty,-1]$, $II = [-1,2]$, $III = [2,\infty)$. I respektive intervall är ekv

I: $-(x+1)-(x-2)+4 = 2x \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = 5/4 \notin I$ så ursprungsekv (*) har ej lösn. i I

II: $x+1-(x-2)+4 = 2x \Leftrightarrow x = 7/2 \notin II$ så (*) ingen lösn i II

III: $x+1+x-2+4 = 2x \Leftrightarrow 3 = 0$ ej sant så —— " —— i III

$\therefore$ ekv (*) saknar lösning.

8) a) $z = a+ib$, $\bar{z} = a-ib$, $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2+b^2 = |z|^2$

b) Se kursboken; pq-formeln ger $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ så om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ är rötterna ej reella.