1/4

1a) $2^{1/3-1}\, 5^{+\frac{1}{2}-1}\, 3^{6+4-2\cdot 5} = 2^{-2/3}\, 5^{-1/2}\, 3^{0} = \dfrac{1}{2^{2/3}\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{(x^2+2xy+y^2)}{(x+y)^2} = \dfrac{(x+y)^2}{(x+y)^2} = 1$

c) $\dfrac{(x^2-y^2)^3}{(x-y)^{2\cdot\frac{3}{2}}(x+y)^2} = \dfrac{(x+y)^3\cancel{(x-y)^3}}{\cancel{(x-y)^3}(x+y)^2} = x+y$

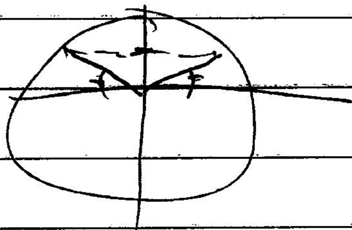
2) $\dfrac{4x-6}{x-1} \le x \iff \dfrac{4x-6-x(x-1)}{x-1} \le 0 \iff \dfrac{-x^2+5x-6}{x-1} \le 0$

$\iff \dfrac{x^2-5x+6}{x-1} \ge 0 \iff \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-1} \ge 0$

x		1		2		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$	$-$	$\not\exists$ def	$+$	0	$-$	0	$+$

Sol $1 < x \le 2$ ou $x \ge 3$

3) a)



$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$

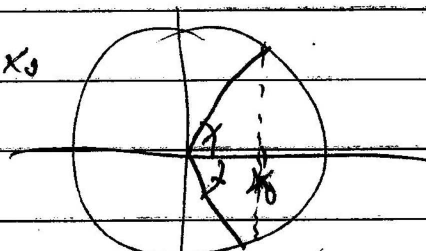
$= \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

b) $\cos 3x = \sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \iff$

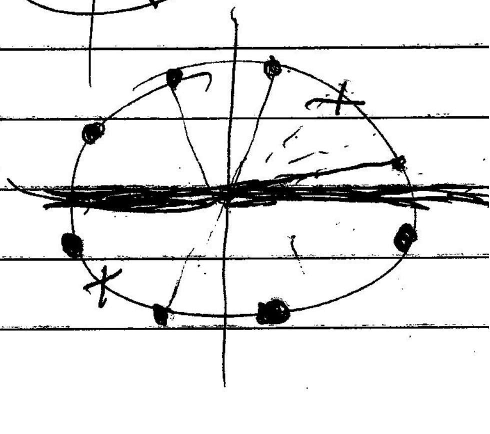
$3x = \frac{\pi}{2} - 5x + k2\pi$

ou

$3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + k2\pi$



$\iff \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$



4) ~~Ett~~ ekvationssystem har antingen precis en lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar tre lösningar kolumner rätt ~~kk~~ ~~[illegible]~~ för vilket k. Vi Gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & k \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & -2 & 2 & 2-3k \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3k-2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2+3k-2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & -1 & (3k-2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3k \end{array}\right)$$

3k är ett pivotelement om $3k \neq 0$ dvs $k \neq 0$ DÅ finns i sista kolumnen och då finns det ingen lösning.

(Om $k=0$ så är ej $3k=0$ pivotelement och i den som rader är en nollrad (som kan slopas utan att lösningsmängden för ekv. syst.) och om $k=0$ finns alltid bara två pivotelement och alltså kan inte alla (tre) kolumner innehålla ett pivotelement. ~~Den~~ Kolumnen som ej innehåller ett pivotelement hör ihop med tredje variabeln i detta fall z eller x_3 eller tredje kolumnens variabel som då är en fri variabel, en parameter. Följaktligen finns alltså oändligt många lösningar om $k=0$)

Svar: $k \neq 0$ innebär att ekv. systemet ej har någon lösning.

5) a) π_0: $x+y+z=1$ har en normalvektor $n=(1,1,1)$
Linjen l_3 har parameterframställning $(x,y,z)=(3,0,1)+t(1,-2,1)$ där $t\in\mathbb{R}$. Vi ser att linjen l_1 har riktningsvektor $v_1=(1,1,1)$ som är parallell med normalen för π_0; så alltså skär l_1 planet π_0. Linjerna l_2 och l_3 har båda riktningsvektor $v=(1,-2,1)$ som är vinkelrät mot π_0:s normalvektor n ty $n\cdot v=(1,1,1)\cdot(1,-2,1)=$ $=1-2+1=0$; alltså är dessa linjer parallella med planet π_0.
Det skulle ju dock kunna vara så att någon av linjerna inte bara är parallell med planet utan faktiskt ligger i (är delmängd av) planet; men punkterna $(3,0,-1)$ och $(3,0,1)$ ligger ju ej i planet så respektive linjer, l_2 resp l_3, skär ej planet ∴ Endast l_1 skär planet π_0.

b) Vektorerna $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(1,0,1)-(0,1,0)=(1,-1,1)$ och $\overrightarrow{P_1P_3}=$ $=(\text{pss})=(2,0,2)$ är parallella med planet. Alltså är
$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-2,-(0),2)=-2(1,0,-1)$ en normalvektor för planet π och $n_\pi=(1,0,-1)$ ∴ π har ekv. $x-z=D=$ (ty t.ex. P_1 tillhör planet π) $=0-0=0$ ∴ $x-y=0$ ekv. för π.

c) Normalerna för π_0 och π är $n=(1,1,1)$ och $n_\pi=(1,0,-1)$ och dessa är ej parallella (då de ju t.o.m. är vinkelräta) så planen är alltså ej parallella och alltså skär de varandra.

d) Pss som i c) ser vi att alla linjerna l_1, l_2 och l_3 är parallella med π och då ingen av punkterna $(2,0,1)$, $(3,0,-1)$ och $(3,0,1)$ ligger i π så skär ingen av linjerna π.

e) Sökt plan har ekvationen $x+y+z=D$ för något $D\in\mathbb{R}$ och för att sökta planet ska innehålla P_4 gäller att $D=2-5+2=-1$ ∴ Sökta planets ekv. är $\boxed{x+y+z=-1}$

6) Låt $f(x) \equiv x - \sin x$. Då gäller att $f(x) > 0 \iff \sin x < x$. Vidare ser vi att om $1 < \frac{\pi}{2} \leq x$ så gäller $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$, så vi behöver bara ytterligare bevisa påståendet för $0 < x < \pi/2$. För sådana x gäller $0 < \cos x < 1$ så att för sådana x gäller $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ strängt växande för $0 < x < \pi/2$. Då $f(0) = 0$ och $f(x)$ är kontinuerlig och alltså strängt växande för $0 < x < \pi/2$ gäller $f(x) > 0$ för $x \in (0, \pi/2)$

$\therefore$ $f(x) > 0,\ \forall x > 0 \iff \sin x < x,\ \forall x > 0$

7) Andraderivatan existerar på I så då existerar derivatan $f'(x)$ på I och alltså är $f(x)$ (och $f'(x)$) kontinuerlig på intervallet I. Enligt förutsättning så existerar olika $x_i \in I$, $i = 1, 2, 3$, sådana att $f(x_i) = 0$. Då gäller att f har extrempunkt på intervallet $[x_i, x_{i+1}]$ som är en inre punkt $\tilde{x}_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2$ (ty annars är $f \equiv 0$ på $[x_i, x_{i+1}]$ för åtminstone ngt av $i = 1, 2$ och i så fall är $f''(x) = 0$ på intervallet (x_i, x_{i+1}) så då är ju slutsatsen uppfylld; dvs existerar punkt i I så $f'' = 0$) I en inre punkt som är en extrempunkt gäller ju enligt sats att $f'(\tilde{x}_i) = 0$, $i = 1, 2$. Alltså gäller enligt Medelvärdessatsen att

$$f''(\eta) = \frac{f'(\tilde{x}_2) - f'(\tilde{x}_1)}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1} = \frac{0 - 0}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1} = 0$$

för ngt $\eta \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \subset I$; vilket visar påståendet.

8) Se kurslitteraturen.