

Examinator: Vilhelm Adolfsson

Skrivtid: 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Vilhelm Adolfsson, 0709-927772

Besked om rättning ges på kurshemsidan. Alla svar ska motiveras med redovisande lösning.

1. Förenkla så långt som möjligt (3p)

$$\text{a) } \frac{2^{1/3}5^{1/2}(-3^2)^3}{(3^{-2})^2(-9)^5 10}, \quad \text{b) } \frac{x^2 + 2xy + y^2}{(x+y)^2}, \quad \text{c) } \frac{(x^2 - y^2)^3}{(x^2 - 2xy + y^2)^{3/2}(x+y)^2}.$$
(3p)

2. Finn de $x \in \mathbb{R}$ sådana att $\frac{4x-6}{x-1} \leq x$.

3. Lös ekvationerna a) $\sin x = \frac{1}{2}$, b) $\cos 3x = \sin 5x$. (3p)

4. Finn om möjligt de $k \in \mathbb{R}$ för vilka följande ekvationssystem ej har lösningar; samt bestäm även de k för vilka ekvationssystemet har precis tre lösningar. Ekvationssystemet ges av: (3p)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & | & 2 \\ 3 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & k \end{pmatrix}.$$

5. Låt π_0 vara planet $x + y + z = 1$ och låt $\ell_1 : (2, 0, 1) + s(1, 1, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, $\ell_2 : (3, 0, -1) + t(1, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ och $\ell_3 : x - 3 = y/(-2) = z - 1$ vara tre linjer i \mathbb{R}^3 . (4p)

(a) Vilka, om någon, av linjerna ℓ_1 , ℓ_2 och ℓ_3 skär planet π_0 ?

(b) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller punkterna $P_1 = (0, -1, 0)$, $P_2 = (1, 0, 1)$ och $P_3 = (2, 1, 2)$.

(c) Skär planen π_0 och π varandra?

(d) Vilka, om någon, av linjerna ℓ_1 , ℓ_2 och ℓ_3 skär planet π ?

(e) Bestäm en ekvation för planet som är parallellt med planet π_0 men som innehåller punkten $P_4 = (2, -5, 2)$.

6. Bevisa att $\sin x < x$, $\forall x > 0$. (3p)

7. Antag att andraderivatet $f''(x)$ existerar på ett intervall I och att $f(x)$ är noll i åtminstone tre olika punkter i I . Bevisa att då måste $f''(x)$ vara noll någonstans i I . (3p)

8. Bevisa att $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$. (3p)