Naturvetarmatematik A', MMGK11, del 2 150319

1a) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$ b) $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = [PI] = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$ c) $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} & dx = 2t\,dt \\ x = t^2 & \end{matrix}\right] = 2\int t\sin t\,dt = [PI] = 2\left(t(-\cos t) - \int(-\cos t)\cdot 1\,dt\right) = -2t\cos t + 2\int\cos t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$

2a) $y' + y = e^{-x}$ linjär, IF: $e^{\int 1\,dx} = e^x \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x y) = e^x e^{-x} = e^0 = 1 \Rightarrow e^x y = \int \frac{d}{dx}(e^x y)\,dx = \int 1\,dx = x + C \Rightarrow y = xe^{-x} + Ce^{-x}$ och $1 = y(0) = 0e^0 + Ce^0 \Rightarrow C \Rightarrow$ sökt lösn.: $y = (x+1)e^{-x}$

b) separabel $\frac{1}{e^y}\frac{dy}{dx} = \sin x \Rightarrow \int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx \Rightarrow -e^{-y} = -\cos x + C \Rightarrow e^{-y} = \cos x + C$

$e^{-1} = e^{-y(\pi)} = \cos\pi + C = -1 + C \Rightarrow C = 1 + e^{-1}$ så $e^{-y} = \cos x + 1 + e^{-1}$

3) $y = y_p + y_h$ För y_h: kar. ekv. $0 = r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2) \Rightarrow y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

För y_p: Ansats $y_p = x^k Ce^x = (k=1) = Cxe^x$ Insättning i ekv. $\Rightarrow$

$e^x = y_p'' + y_p' - 2y_p = 2Ce^x + y_p + Ce^x + y_p - 2y_p = 3Ce^x \Rightarrow C = 1/3$

så $y = y_p + y_h = \frac{1}{3}xe^x + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

4) $G = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - \cos x)^2}{x\arctan x}$ $x\arctan x = (\text{Maclaurin}) = x(x + O(x^3)) = x^2(1 + O(x^2))$

$(e^x - \cos x)^2 = (1 + x + O(x^2) - (1 + O(x^2)))^2 = (x + O(x^2))^2 =$

$= x^2 + 2xO(x^2) + O(x^2)^2 = x^2 + O(x^3) = x^2(1 + O(x))$ så $G = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+O(x))}{x^2(1+O(x^2))} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

5) Kurvorna $y = 8/(x+2)$ och $y = x$ skär varandra i $(2,2)$ och sökt rotationsvolym runt x-axeln är $V = \int_0^2 \pi\left(\frac{8}{x+2}\right)^2 dx - \int_0^2 \pi x^2\,dx = \pi\left[-\frac{64}{x+2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$

$= \pi\left(-\frac{64}{4} - \frac{8}{3} - \left(-\frac{64}{2} - 0\right)\right) = 8\pi\left(\frac{8}{2} - 2 - \frac{1}{3}\right) = 8\pi\left(\frac{24-12-2}{6}\right) = \frac{40\pi}{3}$

6) Derivering ger $y' + xy = x$ som har IF $e^{x^2/2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y) = xe^{x^2/2} \Rightarrow$

$e^{x^2/2}y = \int\frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y)\,dx = \int xe^{x^2/2}\,dx = e^{x^2/2} + C \Rightarrow y = 1 + Ce^{-x^2/2}$ Vidare ger $x = 0$

$0 = y(0) = 1 + Ce^0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$

7) Låt $y(t)$ m³ vara mängden föroreningar i sjön vid tiden t. Sjöns volym $= 1000\cdot 1000\cdot 20$ m³ $= 2\cdot 10^7$ m³ så $y(0) = 5\%\cdot 2\cdot 10^7 = 10^6$.

Tillförda föroreningar $\frac{1}{100}\cdot 2$ m³/s Bortförd förorening $\frac{y(t)}{2\cdot 10^7}\cdot 2$ m³/s

så $y' =$ förändring $= \frac{2}{100} - \frac{y(t)}{10^7} \Rightarrow y' + 10^{-7}y = 2\cdot 10^{-2}$ linjär med lösn. mha IF: $y(t) = 2\cdot 10^5 + 8\cdot 10^5 e^{-10^{-7}t}$ Insättning av 2% förorening vid tiden T ger $\frac{2}{100}\cdot 2\cdot 10^7 = y(T) = 2\cdot 10^5 + 8\cdot 10^5 e^{-10^{-7}T} \Rightarrow e^{-10^{-7}T} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$T = 10^7\ln 4 \approx 5{,}3$ mån