

Skrivtid: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Tim Cardilin, 0703-088304

Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.

Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

1. Beräkna a) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx$, b) $\int \ln x dx$, c) $\int \sin \sqrt{x} dx$. (3p)

2. Lös begynnelsevärdesproblemen a) $y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 1$, b) $y' = e^y \sin x$, $y(\pi) = 1$. (4p)

3. Lös ekvationen $y'' + y' - 2y = e^x$. (3p)

4. Beräkna om möjligt gränsvärdet (3p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \cos x)^2}{x \arctan x}.$$

5. Kurvorna $y = \frac{8}{x+2}$, $x \geq 0$ och $y = x$, $x \geq 0$ avgränsar tillsammans med y-axeln ett begränsat område i xy-planet. Beräkna volymen som detta begränsade område ger upphov till vid rotation runt x-axeln. (3p)

6. Lös integralekvationen $y(x) + \int_0^x ty(t) dt = \frac{x^2}{2}$. (3p)

7. En sjö har ytarean 1 km^2 och ett medeldjup av 20 m. Vid en viss tidpunkt var koncentrationen av kemiska föroreningar i sjön 5%. Genom kemiskt baserade miljöåtgärder har koncentrationen av kemiska föroreningar i sjöns tillflöden minskats till 1%. Tillflödet och utflödet till sjön är $2 \text{ m}^3/\text{s}$ och utflödet kan antas bestå av fullständigt blandat sjövattnet. Hur lång tid tar det att reducera koncentrationen av föroreningar i sjön till 2%? (3p)

8. Formulera och bevisa antingen formeln för variabelsubstitution i en bestämd integral eller formeln för partialintegration i en bestämd integral. (3p)

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$