MMGK11, del 2, 150611

1a) $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

b) $\int x \sin(2x)\,dx = [PI] = x\left(\frac{-\cos(2x)}{2}\right) - \int 1\cdot\left(\frac{-\cos(2x)}{2}\right)dx =$

$= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

c) $\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = [PBU] = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = [HP] = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

$\therefore \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$

2) a) $y' = y^2 e^x$, separabel. Vi ser att $y \equiv 0$ är potentiellt singulär lösning. Om $y \neq 0$ så $\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \int e^x\,dx \Rightarrow$

$-\frac{1}{y} = e^x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -\frac{1}{e^x + C_1} = \frac{1}{-C_1 - e^x} =$

$= \frac{1}{C - e^x}$ $C \in \mathbb{R}$ $\therefore$ $y = \begin{cases} \frac{1}{C - e^x}, & C \in \mathbb{R} \text{ allmän lösn.} \\ 0 & \text{singulär lösn.} \end{cases}$

b) $y' + \left(-\frac{1}{x}\right)y = x^2$, 1:a ordn. linjär. IF: $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|}$

$= e^{\ln|x|^{-1}} = |x|^{-1} = \frac{1}{|x|} = \left|\frac{1}{x}\right| = |x^{-1}|$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\left|\frac{1}{x}\right| y\right) = \left|\frac{1}{x}\right| x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}\cdot x^2 = x \Rightarrow$

$\frac{1}{x}y = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right)dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $y = \frac{x^3}{2} + Cx$, $C \in \mathbb{R}$

3) $y'' + 5y' + 6y = 6x$, andra ordningen linjär $\Rightarrow y = y_p + y_h$

y_h: Kar. ekv. $0 = r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) \Rightarrow y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$

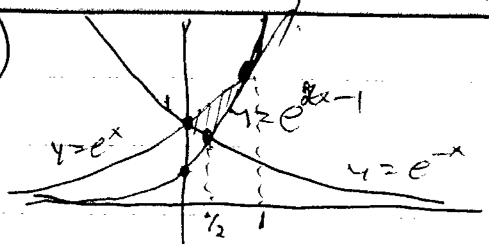
y_p: Ansatz $y_p = x^m(Ax+B) = (m=0) = Ax+B \Rightarrow y_p' = A$, $y_p'' = 0$ Insättning $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + 5A + 6(Ax+B) = 6x \Rightarrow \begin{cases} 6A = 6 \\ 5A + 6B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = -5/6 \Rightarrow y_p = x - \frac{5}{6}$

$\therefore y = x - \frac{5}{6} + C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$

MMGK11 del 2 15 06 11 (2/3)

4)



$y=e^x$ och $y=e^{-x}$ skär varandra för $x=0$

$y=e^x$ och $y=e^{2x-1}$ —"— $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2x-1 \Leftrightarrow x=1$

$y=e^{-x}$ och $y=e^{2x-1}$ —"— $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x = 2x-1 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=1/3$

$\therefore$ Inneslutna area $A = \int_0^{1/3} e^x - e^{-x}\,dx + \int_{1/3}^{1} e^x - e^{2x-1}\,dx$

$$= \left[e^x + e^{-x}\right]_0^{1/3} + \left[e^x - \tfrac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{1/3}^{1} = \dots = \tfrac{1}{2}e + \tfrac{3}{2}e^{-1/3} - 2$$

---

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)^2}{x^2(\cos x - 1)^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}\right)^2 = \left(\begin{array}{l}\text{ty funktionen}\\ f(z)=z^2 \text{ är}\\ \text{kontinuerlig}\end{array}\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + O(x^5)}{x\left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{2} + O(x^2)\right)}\right)^2$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{-\frac{1}{2} + O(x^2)}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{1}{6}+0}{-\frac{1}{2}+0}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

---

6) Låt $f(x) = e^{x^2}\sin x$. Då gäller

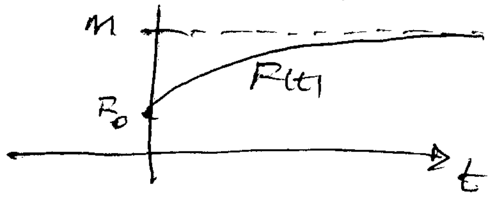
$$f(-x) = e^{(-x)^2}\sin(-x) = e^{x^2}(-\sin x) = -e^{x^2}\sin x = -f(x)$$

Så f är en udda funktion $\Rightarrow$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ för varje $a \in \mathbb{R}$; speciellt

gäller $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\sin x\,dx = 0$.

7) a) $F(0)$ är rimligen minst. $F(t)$ ökar nog snabbast i början, dvs för $t>0$, t litet. Förmågan tränas och växer med tiden från $F(0) \equiv F_0$ till den maximala förmågan M som (möjligen) antas efter oändligt lång tid. Graf



b) En rimlig lärmodell är att en logisk enkel modell av förloppet ges av $\frac{dF}{dt} = k(M-F)$, $k>0$ separabel (men även linjär)

Vi ser att $F \equiv M$ är en potentiell singulär lösning och om $F \neq M$ har vi $\int \frac{1}{M-F}\,dF = \int k\,dt \Rightarrow -\ln|M-F| = kt + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow |M-F| = e^{-kt-c_1} = e^{-c_1}e^{-kt} = c_2 e^{-kt}$, $c_2>0 \Rightarrow M-F = \pm c_2 e^{-kt} = c_3 e^{-kt}$, $c_3 \neq 0$

Vi ser att om vi låter $c_3 = 0$ så får vi den potentiellt singulära lösningen $F \equiv M$ (som alltså inte var singulär).

$\therefore$ $F = M - Ce^{-kt}$, $C \in \mathbb{R}$, och $F(0) = F_0 \Rightarrow$ $F(t) = M - (M-F_0)e^{-kt}$ (som har en graf som ovan)

8) f kontinuerlig $\Leftrightarrow$ f kontinuerlig i varje punkt x i definitionsmängden, D_f $\Leftrightarrow$ $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x)) = 0$ och att detta gäller om f deriverbar visar vi nu.

Vi ser att för godtyckligt $x \in D_f$ gäller $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x)) =$
$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h =$
$=$ (ty f deriverbar (i $\forall x \in D_f$)) $= f'(x)\cdot\lim_{h\to 0} h = f'(x)\cdot 0 =$
$= 0$. Alltså är f kontinuerlig enligt ovan.