Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 150611

Skrivtid: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Christoffer Standar, tel 0703-088304
Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.
Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna **a)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx$, **b)** $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$. (3p)

2. Lös differentialekvationerna a) $y' = y^2e^x$, b) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$. (4p)

3. Lös ekvationen $y'' + 5y' + 6y = 6x$. (3p)

4. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = e^{-x}$, $y = e^x$ och $y = e^{2x-1}$. (3p)
   Hint: Skissa först funktionernas grafer, för att få en uppfattning om aktuellt område.

5. Beräkna om möjligt gränsvärdet (3p)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)^2}{x^2((\cos x)-1)^2}.$$

6. Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x^2}\sin x\,dx$. (3p)

7. Låt $F(t)$ vara en, vid tiden $t \geq 0$, persons uppmätta förmåga att utföra en viss vanlig, standardmässig, färdighet. (3p)

   a) När, vid vilken tid $t \geq 0$, är, enligt gängse uppfattning, $F(t)$ minst? När ökar $F(t)$ snabbast? Låt $M \in \mathbb{R}$ vara värdet/storleken på den förmodade maximala förmågan/färdigheten. Skissa en förmodad graf för funktionen $F(t)$.
   b) Ställ upp och motivera väl, en förmodad differentialekvation för $F(t)$. Lös denna differentialekvation och se att lösningens graf överensstämmer med den tidigare i **a)** skissade grafen. Om graferna ej överensstämmer; förklara varför, i termer av antagande om den förmodade differentialekvationen.

   Ledning: 'Övning ger färdighet'; men hur? Det kan antas att förmågan F ökar med mängden övning och att förändringen i förmåga, $\frac{dF}{dt}$, är proportionell mot någon funktion av F. Hur ser denna funktion rimligen ut? Förmodligen är väl $F_0 \equiv F(0) > 0$ och förmågan förbättras med tiden som mest i början, $\frac{dF}{dt}$ som störst då, för att hela tiden förbättras men med tiden förbättras allt mindre och inte bli så mycket bättre när man närmar sig den maximala förmågan (dvs $\frac{dF}{dt}$ liten då och går mot 0 då $t \to \infty$). Kort sagt är alltså förmodligen $\frac{dF}{dt} = kG(t)$ där k konstant och $G(t)$ beror på $F(t)$ som ovan; d v s $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$. Vad är till exempel en rimlig första enkel gissning för $G(t)$?

8. Bevisa att om en funktion är deriverbar så är den kontinuerlig. (3p)

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$