1a) $\int_0^1 x(x+x^2)\,dx = \int_0^1 x^2+x^3\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = 7/12$

b) $\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \left[\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx\end{matrix}\right] = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C$

c) $\int \frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx = \int \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-3)}\,dx = \int \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}\,dx = [PBU] = \int \frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x-3}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\ln|x-3|\right)+C = \ln\sqrt{|(x-1)(x-3)|}+C$

d) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = [t=\sqrt{x}] = 2\int te^t\,dt = [PI] = 2\left(te^t-\int 1\cdot e^t\,dt\right) =$

$= 2(t-1)e^t+C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$ ☒

2a) $y' = y^2e^x$ Vi ser att $y=0$ är en potentiellt singulär lösning. Om $y\neq 0$ så har vi $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = e^x\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int e^x\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = e^x+C_1,\ C_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{e^x+C_1} = \frac{1}{-C_1-e^x} = \frac{1}{C-e^x},\quad C\in\mathbb{R}$

$\therefore\ y = \begin{cases} \frac{1}{C-e^x}, & C\in\mathbb{R}, \text{ allmän lösning} \\ 0 & \text{singulär lösning} \end{cases}$

b) $xy'-2y = x^4\sin x \Rightarrow y'-\frac{2}{x}y = x^3\sin x$, 1:a ordn. linjär

IF: $e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-2}} = |x|^{-2} = \frac{1}{|x^2|} = \frac{1}{x^2}$

$\therefore\ \frac{1}{x^2}y = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right)dx = \int \frac{1}{x^2}x^3\sin x\,dx = \int x\sin x\,dx = [PI] =$

$= x(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x+\int\cos x\,dx = -x\cos x+\sin x+C$

$\therefore\ y = x^2(-x\cos x+\sin x+C) = -x^3\cos x+x^2\sin x+Cx^2,\quad C\in\mathbb{R}$ ☒

3) $y''+5y'+6y = 6x$ linjär $\Rightarrow y = y_p+y_h$ y_h: Kar. ekv. $0 = r^2+5r+6 =$

$= (r+2)(r+3) \Rightarrow y_h = C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$ y_p: Ansätt $y_p = x^m(Ax+B) =$

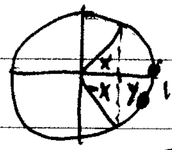
$= (m=0) = Ax+B \Rightarrow y_p' = A,\ y_p'' = 0$ Insättning i ekvationen $\Rightarrow$

$6x = y_p''+5y_p'+6y_p = 0+5A+6(Ax+B) \Rightarrow \begin{cases} 6A=6 \\ 5A+6B=0 \end{cases} \Rightarrow A=1,\ B=-5/6$

$\therefore\ y_p = x-\frac{5}{6}$ så $y = y_p+y_h = x-\frac{5}{6}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$ ☒

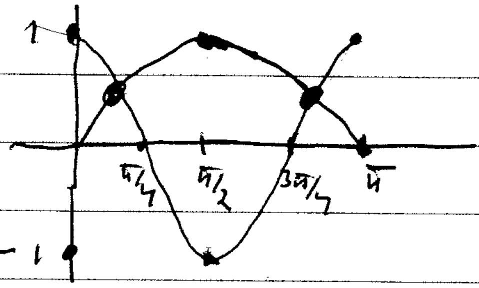
4) Kurvorna skär varandra för $v \in [0,\pi]$ då $\sin v = \cos 2v \Leftrightarrow$

$\cos(\frac{\pi}{2}-v) = \cos(2v) = y_0$



$\therefore \frac{\pi}{2}-v = 2v + n2\pi$

eller $\frac{\pi}{2}-v = -2v + n2\pi$



Om $\frac{\pi}{2}-v = -2v + n2\pi \Leftrightarrow v = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \notin [0,\pi]$ för nyt n, så inga lösningar i detta fall. Om $\frac{\pi}{2}-v = 2v + n2\pi \Leftrightarrow 3v = \frac{\pi}{2} + n2\pi \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$ och dessa $\in [0,\pi]$ då $n=0$ och $n=1$; dvs då $v = \pi/6$ och $v = 5\pi/6$ är Inneskärn sökt

$$\text{area} = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} |\sin v - \cos 2v|\,dv = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin v - \cos 2v\, dv = \left[-\cos v - \frac{\sin 2v}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3} - \left(-\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \dots = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

5) Låt $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots\dots+n-2+n-1+n$ (n termer)

$= n+n-1+n-2+\dots\dots+3+2+1$

$\therefore 2S_n = 1+n + 2+n-1 + 3+n-2 + \dots\dots + n-2+3 + n-1+2 + n+1$ (n termer som var och en är n+1)

$= n(n+1) \quad \therefore \boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Vi har nu för den allmänna aritmetiska summan att $a_i = a_{i-1} + d$ för $n = 2,3,4,\dots \Rightarrow a_2 = a_1 + d$ och $a_3 = a_2 + d =$
$= a_1 + d + d = a_1 + 2d$ och p.s.s. $a_i = a_1 + (i-1)d \quad i = 2,3,4,\dots$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)d = \sum_{i=1}^{n} a_1 + \sum_{i=1}^{n}(i-1)d = a_1\sum_{i=1}^{n} 1 + d\sum_{i=1}^{n} i-1 =$$

$$= a_1 n + d\sum_{j=1}^{n-1} j = a_1 n + d\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1)) = \frac{n}{2}(2a_1 + a_n - a_1)$$

$= \frac{n}{2}(a_n + a_1)$ där vi använt att $a_i = a_1 + (i-1)d$ så att med $i = n$ får vi $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow (n-1)d = a_n - a_1$

(6) Låt $y(t)$ vara antalet bananflugor i populationen vid tiden t timmar. Vi vet att $y'(t)$, förökningshastigheten, är proportionell mot $y(t) \Leftrightarrow y'(t) = ky(t)$ där k är en konstant $\in \mathbb{R}$. Vi gäller $y' = ky \Leftrightarrow y' - ky = 0$ som är 1:a ordningen, linjär. IF: $e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$

$\therefore \frac{d}{dt}(e^{-kt}y(t)) = e^{-kt} \cdot 0 = 0 \Rightarrow e^{-kt}y = \int \frac{d}{dt}(e^{-kt}y)dt = \int 0\,dt = C$

$\therefore y(t) = Ce^{kt}$ där C konstant. Vi vet

$$\begin{cases} 128 = y(1) = Ce^{k} \\ 512 = y(2) = Ce^{2k} \end{cases} \quad \therefore e^{k} = \frac{Ce^{2k}}{Ce^{k}} = \frac{512}{128} = 4$$

$\therefore 128 = y(1) = Ce^{k \cdot 1} = C \cdot 4 \Rightarrow C = 128/4 = 32$

$\therefore y(0) =$ antalet bananflugor som infångades $= Ce^{k \cdot 0} = C \cdot 1 = 32$

Svar: 32

(7) $y'' - 2y' + y = e^{x}$ 2:a ordningen, linjär $\Rightarrow y = y_p + y_h$

$\Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1)y = e^{x}$ För y_h: kar. ekv.: $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$

$\Rightarrow r_{1,2} = 1$ dvs $r = 1$ är en dubbelrot. $\therefore y_h = (Ax + B)e^{x}$

För y_p: Ansätt $y_p = x^k Ce^{x} = (k=2) = Cx^2e^{x} \Rightarrow$

$y_p' = C(2xe^{x} + x^2e^{x})' = 2Cxe^{x} + y_p$, $y_p'' = (y_p')' =$

$= (2Cxe^{x} + y_p)' = 2Ce^{x} + 2Cxe^{x} + y_p' = 2Ce^{x} + 2Cxe^{x} + 2Cxe^{x} + y_p = 2Ce^{x} + 4Cxe^{x} + y_p$ Insättning i ekvationen $\Rightarrow e^{x} = y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ce^{x} + 4Cxe^{x} + y_p - 2(2Cxe^{x} + y_p) + y_p = 2Ce^{x}$ $\therefore 2C = 1 \Rightarrow C = 1/2$

$\therefore y_p = \frac{1}{2}x^2e^{x}$ $\therefore y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x^2e^{x} + (Ax + B)e^{x} = (\frac{1}{2}x^2 + Ax + B)e^{x}$

BVP $\Rightarrow 1 = y(0) = B$, $1 = y'(0) = y_p'(0) + y_h'(0) = 0 + B + A = 1 + A \Rightarrow A = 0$

$\therefore$ sökt lösning: $y = (\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{x}$

(8) Se Genitillerator.