Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 150828

Skrivtid: 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Johan Bondestam Malmberg, tel 0703-088304
Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.
Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna: a) $\int_0^1 x(x+x^2)\,dx$, b) $\int \tan x\,dx$, c) $\int \frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$, d) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. (1+1+1+2p)

2. Lös differentialekvationerna a) $y' = y^2e^x$, b) $xy' - 2y = x^4\sin x$. (3p)

3. Lös ekvationen $y'' + 5y' + 6y = 6x$. (3p)

4. I intervallet $[0, \pi]$ innesluter funktionskurvorna $y = \sin v$ och $y = \cos(2v)$ ett område. Bestäm detta områdes area (uttryckt i areaenheter, ae). (3p)

5. Bevisa för specialfallet av en aritmetisk summa att $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Använd detta för att bevisa den allmänna aritmetiska summan där $a_i = a_{i-1} + d$ med d en konstant (differensen); det vill säga, bevisa att $\sum_{k=1}^{n} a_i = \frac{a_1+a_n}{2}n$. (3p)

6. Ett gäng bananflugor samlades in och var en timme senare 128 stycken. Populationen förökar sig som vanligt snabbt och var efter ytterligare en timme, 512 st. Förökningshastigheten är proportionell mot populationens storlek. Hur många bananflugor samlades ursprungligen in? (3p)

7. Vilken typ av ODE är $y'' - 2y' + y = e^x$. Lös för denna differentialekvation följande BVP (begynnelsevärdesproblem): $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$. (3p)

8. Bevisa att om en funktion är deriverbar så är den kontinuerlig. (2p)

vgv

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$