Nätverksmatematik A1, MM1GKU del 2, 160312, LÖS4

1a) $\int \frac{1}{4x^2+1}dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1}dx = [t=2x] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan(2x)+C$

b) $\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = [PBU] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = [HP] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

så $\int \frac{1}{x+x^2}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$

c) $\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\sin x\, dx = \begin{bmatrix} t=\cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x\, dx \end{bmatrix} = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2$

d) $\int x e^x dx = [PI] = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

2) a) $y' - y = x$, linjär, IF: $e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$ så $\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = xe^{-x} \Rightarrow$

$e^{-x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{-x}y)dx = \int xe^{-x}dx = [PI] = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx =$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C \Rightarrow y = -(x+1) + Ce^{x}$ och BV $\Rightarrow$

$0 = y(0) = -(0+1) + Ce^0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$ sökt lösning $y(x) = -(x+1) + e^x$

b) $y' = xy$ har $y=0$ som potentiellt singulär lösning. Om $y \neq 0$ så gäller $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x$, separabel, $\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int x\,dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2}+C_1} = e^{C_1}e^{\frac{x^2}{2}} = C_2 e^{\frac{x^2}{2}}$, $C_2 > 0$

$\Rightarrow y = \pm C_2 e^{x^2/2} = C_3 e^{x^2/2}$, $C_3 \neq 0$, allmän lösning

Om vi här i den allmänna lösningen sätter $C_3 = 0$ så ser vi att vi får den potentiellt singulära lösningen som alltså kan inlogas i den allmänna lösningen genom att vi tillåta även $C_3 = 0$ i lösningarna av

$y = Ce^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$

c) $0 = y'' - 8y' + 15y = (D^2 - 8D + 15)y \Rightarrow$ kar. ekv. $0 = r^2 - 8r + 15 =$
$= (r-3)(r-5)$ så att rötterna är $r_{1,2} = 3, 5$ och alltså är
$y = y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$

3) Linjär ODE $\Rightarrow y = y_p + y_h$. För y_h: kar. ekv. $0 = r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$
$\Rightarrow y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$. För y_p: Ansatt $y_p = x^m(Ax+B) = (m=0) = Ax+B$
så $-4x = y_p'' + y_p' - 2y_p = 0 + A - 2(Ax+B) \Rightarrow A = 2, B = 1 \Rightarrow y_p = 2x+1$

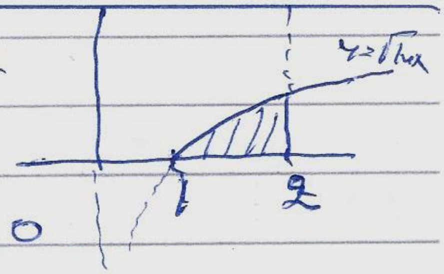
så $y = 2x + 1 + C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$

Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 160317, Lösn.

4) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-\cos x)^2}{x\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+\mathcal{O}(x^2)-1+\mathcal{O}(x^2))^2}{x(x+\mathcal{O}(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{(x(1+\mathcal{O}(x)))^2}{x^2(1+\mathcal{O}(x^2))} =$

$= \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{x^2}{x^2}} \frac{(1+\mathcal{O}(x))^2}{1+\mathcal{O}(x^2)} = \frac{(1+0)^2}{1+0} = 1$

5) Rotation kring x-axeln ger volymen $V_x =$



$= \int_1^2 \pi (\sqrt{\ln x})^2 dx = \left(\begin{matrix} \text{Obs: } \sqrt{a^2} = |a| \\ (\sqrt{a})^2 = a \end{matrix} \right) =$

$= \pi \int_1^2 \ln x\, dx = [PI] = \pi \left([x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \pi \Big(2\ln 2 - 0$

$- \int_1^2 1\, dx \Big) = \pi (2\ln 2 - 1)$

6) $y'' + y = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$, lösning $y = y_p + y_h$.

För y_h: kar. ekv. $0 = r^2+1 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

För y_p: lös $y_{p_1}'' + y_{p_1} = \frac{1}{2}$ och $y_{p_2}'' + y_{p_2} = \frac{1}{2}\cos x$. Då är $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

För y_{p_1}: Vi ser direkt att $y_{p_1} = \frac{1}{2}$. För y_{p_2}: Ansätt

$y_{p_2} = x^m (A\cos x + B \sin x) = (m=1) = x(A\cos x + B\sin x) \Rightarrow$

$y_{p_2}' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$, $y_{p_2}'' = -A\sin x + B\cos x$
$+ (-A\sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\sin x) = -2A\sin x + 2B\cos x - y_{p_2} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\cos x = y_{p_2}'' + y_{p_2} = -2A\sin x + 2B\cos x \Rightarrow A=0,\ B = 1/4$

$\therefore y_{p_2} = \frac{1}{4} x \sin x \ \therefore y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1\cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x \sin x$

7) Se utskick under kursen. Låt $t=0$ motsvara kl. 12 och låt $x(t)$ = plogad sträcka i mil vid tiden t. Antag det började snöa vid tiden T före klockan 12, dvs vid tiden $t = -T$. Snöfallets intensitet konstant $\Rightarrow$ snödjupet proportionellt mot $t+T$, dvs snödjupet $= c(t+T)$ för någon konstant c.

$\therefore$ enl. antagande att snöplogens hastighet $\cdot$ snödjupet =

Ingenjörsmatematik A1, MMGK11, del 2, 160317, lösn.

= Snömängd undanskottad under en (kort) tidsenhet = = konstant; dvs $C(t+T)\frac{dx}{dt} = \text{konst.} \equiv \tilde{k}$, separabel ODE, så $dx = \tilde{k}\frac{1}{t+T}dt$ med lösning $x(t) = k\ln|t+T| + C$

De tre villkoren $x(0)=0$, $x(1)=2$, $x(2)=3$ bestämmer de tre obestämda storheterna k, C och T och ger

$T \approx 37$ min $\Rightarrow$ det började snöa 37 min innan 12^{00}; dvs det började snöa 11^{23}.

8) Tyvärr smög det sig in en liten miss i formuleringen av uppgiften; den skulle varit "... samt bevisa satsen för f' under den givna förutsättningen, dvs bevisa ... ... (medelvärdet av f' på intervallet $[a,b]$) under angiven förutsättning på funktionen f'.

Sats Om $f \in C([a,b])$ så $\exists$ minst ett tal $\xi \in [a,b]$ så $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Bevis $f \in C([a,b]) \Rightarrow f$ har maximum och minimum på $[a,b]$ så med $\min_{[a,b]}(f) \equiv m_f$ och $\max_{[a,b]} f \equiv M_f$ har vi

$(b-a)m_f = \int_a^b m_f\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M_f\,dx = M_f(b-a)$

dvs $m_f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \le M_f$ så satsen om mellanliggande värde

ger nu att det $\exists$ minst ett tal $\xi \in (a,b)$ så $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Satsen tillämpad på $f'(x)$ ger nu: $\exists\, \xi \in [a,b]$

$f'(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left[f(x)\right]_a^b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

då $f'(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$. ∎