Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 160317

Skrivtid: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Christoffer Standar, ankn 5325.
Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.
Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna **a)** $\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$, **b)** $\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$, **c)** $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$, **d)** $\int xe^x\,dx$. (4p)

2. Lös följande ODE a) $y' - y = x,\ y(0) = 0$, b) $y' = xy$, c) $y'' - 8y' + 15y = 0$. (3p)

3. Lös ekvationen $y'' + y' - 2y = -4x$. (3p)

4. Beräkna om möjligt gränsvärdet (3p)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos x)^2}{x \arctan x}.$$

5. Kurvan $y = \sqrt{\ln x},\ x \geq 1$ och x-axeln avgränsar tillsammans med linjen x=2 parallell med y-axeln, ett begränsat område i xy-planet. Beräkna volymen som detta begränsade område ger upphov till vid rotation runt x-axeln. (3p)

6. Lös ekvationen $y'' + y = \cos^2(\frac{x}{2})$. (3p)

7. En dag började det snöa. En snöplog skickades ut klockan tolv. Den har plogat två mil klockan 13.00 och tre mil klockan 14.00. När började det snöa? (Det antas att snöfallets intensitet är konstant och att plogen undanskuffar en konstant mängd snö per tidsenhet.) (3p)

8. Ange tillräckliga villkor för funktionen i Integralkalkylens medelvärdessats; ge en informell 'skiss' av satsen och satsens innebörd samt bevisa satsen för f' under den angivna förutsättningen, dvs bevisa att det existerar åtminstone ett ξ i intervallet $[a, b]$, sådant att $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, (medelvärdet av f' på intervallet $[a, b]$), under angiven förutsättning på funktionen f'. (3p)

Maclaurinutvecklingar på baksidan, vgv.

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$