MMGK11, Naturvetarmatematik A1, del1, 170213

Examinator: Vilhelm Adolfsson
Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Vilhelm Adolfsson, 5307, (031-7725307)
Besked om rättning ges på kurshemsidan. Alla svar ska motiveras med redovisande lösning.

---

1. a) Förenkla $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{7}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}$ så långt som möjligt, b) Lös om möjligt $|x-2| \leq -1$, c) Lös om möjligt $|x-2| = 1$. (3p)

2. Derivera följande funktioner: *i)* $\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$, *ii)* $\sin(x+\sin(2x))$, samt visa att polynomet $p(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$ har ett nollställe i intervallet $[1,2]$. (3p)

3. Lös ekvationerna a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$, b) $\cos 3x = \sin 5x$, samt c) olikheten $\dfrac{x-1}{x+1} \leq \dfrac{2x-5}{x-1}$. (3p)

4. a) Bestäm en normal för planet $x - 2y - z = 1$, b) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (1,1,1)$ och $P_3 = (2,-1,0)$. (3p)

5. Låt $k \in \mathbb{R}$ och betrakta ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. (3p)

   (a) Finns det k så att ekvationssystemet har precis en unik lösning?

   (b) Hur många lösningar har ekvationssystemet för $k = 3$?

   (c) Hur många lösningar har det homogena ekvationssystemet (med högerled 0) för olika k?

6. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$. Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas). (3p)

7. Låt $P_1 = (1,-1,-1)$, $P_2 = (2,0,0)$ och $P_3 = (2,-1,1)$ samt låt $u = \overrightarrow{P_1P_2}$ och $v = \overrightarrow{P_1P_3}$. Finn $\mathrm{Proj}_v(u)$, dvs projektionen av u på v. (3p)

8. (a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas) och skissa en illustrativ bild, (4p)

   (b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas) och skissa en illustrativ bild,

   (c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a,b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a,b)$. Bevisa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$.