Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del 2 170316

1a) $\int \frac{1}{4x^2+1}dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1}dx = \left[\begin{matrix} t=2x \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$

b) $\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = [PBU] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = [HP] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2+x}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$

c) $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \left[\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{matrix}\right] = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{t}dt = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2$

d) $\int xe^x dx = [PI] = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - (e^x + C) = (x-1)e^x + C$

2a) $y' - y = x$ Linjär, IF: $e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$ $\therefore \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = xe^{-x} \Rightarrow$

$e^{-x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{-x}y)dx = \int xe^{-x}dx = [PI] = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx =$

$= -xe^{-x} + (-e^{-x} + C) = -(x+1)e^{-x} + C \Rightarrow y = -(x+1) + Ce^x$ och BV $\Rightarrow$

$0 = y(0) = -(0+1) + Ce^0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$ sökt lösning är $y(x) = -(x+1) + e^x$

b) $y' = xy$ har $y=0$ som potentiellt singulär lösning. Om $y \neq 0$ så gäller $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x$, separabel, $\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int x\,dx \Rightarrow \ln|y| =$
$= \frac{x^2}{2} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^{\ln|y|} = e^{x^2/2 + C_1} = e^{C_1}e^{x^2/2} = C_2 e^{x^2/2}$, $C_2 > 0$
$\Rightarrow y = \pm C_2 e^{x^2/2} = C_3 e^{x^2/2}$, $C_3 \neq 0$; allmän lösning. Om vi här i den allmänna lösningen sätter $C_3 = 0$ får vi den potentiellt singulära lösningen som alltså kan inlogas i den allmänna lösningen genom att där tillåta också $C_3 = 0$ $\therefore$ Lösningarna är $y = Ce^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

c) $0 = y'' - 8y' + 15y = (D^2 - 8D + 15)y \Rightarrow$ kar. ekv. $0 = r^2 - 8r + 15 =$
$= (r-3)(r-5) \Rightarrow y = y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$

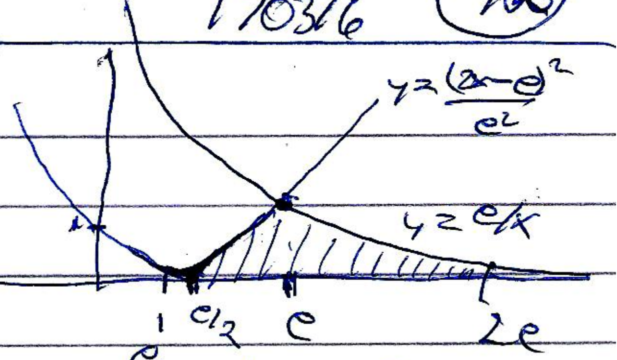
3) Linjär ODE $\Rightarrow y = y_p + y_h$ För y_h: kar. ekv. $0 = r^2 + r - 2 =$
$= (r-1)(r+2) \Rightarrow y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ För y_p: Ansätt $y_p = x^m(Ax+B) = (m=0) =$
$= Ax+B$ $\therefore$ $-4x = y_p'' + y_p' - 2y_p = 0 + A - 2(Ax+B) \Rightarrow A = 2, B = 1 \Rightarrow y_p = 2x+1$
$\therefore$ $y = y_p + y_h = 2x+1 + C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(\cos(3x)-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x+O(x^2)-1)(x^3+O((x^3)^2))}{\left(1 - \frac{(3x)^2}{2!} + O((3x)^4) - 1\right)^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x+O(x^2))(x^3+O(x^6))}{\left(-\frac{9}{2}x^2 + O(x^4)\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(2+O(x))\cancel{x^3}(1+O(x^3))}{\cancel{x^4}\left(-\frac{9}{2}+O(x^2)\right)^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(2+O(x))(1+O(x^3))}{\left(-\frac{9}{2}+O(x^2)\right)^2} = \frac{(2+0)(1+0)}{\left(-\frac{9}{2}+0\right)^2} = \frac{8}{81}$

Naturvetenskaplig matematik A1, MMGK11 del 2, 170316 (2/2)



(5) Låt $f(x) = \frac{(2x-e)^2}{e^2}$ så att $f(\frac{e}{2}) = 0$ och $f(x) \geq 0$ och $f'(x) = \frac{4}{e^2}(2x-e) > 0$ $x > \frac{e}{2}$ och < 0 då $x < e/2$, $f'(e/2) = 0$ så $\min f = f(e/2) = 0$, $f(e) = 1 = \frac{e}{e}$ så $x = e$ skärningspunkt är. Sökt volym $= \int_{e/2}^{e} \pi \frac{(2x-e)^2}{e^2}dx + \int_e^{2e} \pi \left(\frac{e}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{e^4}\int_{e/2}^{e} 4x^2+e^2-4ex\,dx + \pi e^2 \int_e^{2e} \frac{1}{x^2}dx = \frac{\pi}{e^4}\left[\frac{4}{3}x^3+e^2x-2ex^2\right]_{e/2}^{e} + \pi e^2\left[-\frac{1}{x}\right]_e^{2e} = \dots = \frac{\pi}{6e}(1+3e^2)$

6) $y''+2y'+2y = x+1+x\sin x$ Linjär, inhomogen $\Rightarrow y = y_p + y_h$

Kar. ekv. $0 = r^2+2r+2 = (r+1)^2+1 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y_h = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

Låt $f_1(x) = x\sin x$, $f_2(x) = x+1$ och låt y_{p_1} resp. y_{p_2} vara lösningar till ekvationen med HL $f_1(x)$ resp $f_2(x)$. Då gäller att $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.
För y_{p_2} ansätt $y_{p_2} = x^m(ax+b) = (m=0) = ax+b$ och insättning $\Rightarrow b = 0$ och $a = \frac{1}{2}$ så $y_{p_2} = \frac{1}{2}x$. För y_{p_1} ansätt $y_{p_1} = x^m((Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x) = (m=0) = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x$. Derivering, insättning i ekvationen $\Rightarrow x\sin x = \dots = [(2A+C)x + 2A+2B+2C+D]\cos x + [(A-2C)x + 2A+B-2C-2D]\sin x \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2A+C=0 \\ 2A+2B+2C+D=0 \\ A-2C=1 \\ 2A+B-2C-2D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/5 \\ B=-2/25 \\ C=-2/5 \\ D=14/25 \end{cases}$$

$\therefore y = y_h + y_{p_2} + y_{p_1} = e^{-x}(C_1\sin x + C_2 \cos x) + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{5} - \frac{2}{25}\right)\sin x + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{14}{25}\right)\cos x$ ■

7) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = [PI] = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt\right) = [PI] = \frac{1}{\pi n}\left(\left[f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt\right) = \frac{1}{\pi n}\left(\frac{1}{n}\left(f'(\pi)\cos(n\pi) - f'(-\pi)\cos(n\pi)\right) - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt\right) = \frac{1}{n^2}c_n$ där $|c_n| \leq C$ något $C \in \mathbb{R}$ och $\forall n \geq 1$. På ss $|b_n| \leq \frac{1}{n^2}C$ $\therefore$

$\sum_{n\geq 1}|a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)| \leq \sum_{n\geq1} |a_n| + |b_n| \leq C\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ så att Fourierserien är absolutkonvergent och därmed konvergent ■

8) Se kursutvärderingen