Naturvetarmatematik A1, MMGK11, del2, 170316

Skrivtid: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Henrik Imberg, ankn 5325.
Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.
Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna **a)** $\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$, **b)** $\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$, **c)** $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$, **d)** $\int xe^x\,dx$. (4p)

2. Lös följande ODE a) $y'-y=x,\ y(0)=0$, b) $y'=xy$, c) $y''-8y'+15y=0$. (3p)

3. Lös ekvationen $y''+y'-2y=-4x$. (3p)

4. Beräkna om möjligt gränsvärdet (3p)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}.$$

5. Kurvorna $y=(\frac{2x-e}{e})^2$ och $y=\frac{e}{x}$ samt x-axeln avgränsar tillsammans med linjen x=2e parallell med y-axeln, ett begränsat område i första kvadranten av xy-planet. Beräkna volymen som detta begränsade område ger upphov till vid rotation runt x-axeln. (3p)

6. Lös ekvationen $y''+2y'+2y=x+1+x\sin x$. (3p)

7. Låt den reella funktionen $f(t)$ vara given och betrakta den på ett intervall av längd 2π, associerade fourierserien $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$. Visa att om $f\in C^2(\mathbb{R})$, d v s f är två ggr kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$, så är fourierserien konvergent. Man behöver inte här visa vad fourierserien konvegerar till; bara att den är en konvergent serie. **Hint**: Visa att fourierkoefficienterna $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ och $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ avtar som $1/n^2$ genom att partialintegrera i uttrycken för fourierkoefficienterna. (3p)

8. Formulera och bevisa Integral- och Differentialkalkylens huvudsats; båda delarna. (3p)

Maclaurinutvecklingar på baksidan, vgv.

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$