

Skrivtid: 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Olof Elias, ankn 5325.

Besked om rättning av tentan ges på kurshemsida.

Skriv kurs och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

1. Beräkna a) $\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2} dx$, b) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$, c) $\int \frac{1}{x+x^2} dx$, d) $\int xe^x dx$, e) $\int e^{\sqrt{x}} dx$. (5p)

2. Till vilken/vilka (om någon överhuvudtaget) av följande tre differentialekvationer, är funktionen $y = y(x) = x^2 + x \ln x$ en lösning: (2p)

(a) $y' = \frac{y}{x} + x + 1$,

(b) $yy' = (\ln x)^2 + 1$,

(c) $x^2y'' - xy' + y = x^2$.

3. Lös följande ODE: a) $y' = -y + x$, b) $y' = y^2 + 1$, $y(0)=0$ c) $y' = y^2$, $y(0) = 0$. (3p)

4. Skissa det ändliga område som begränsas av positiva x-axeln och graferna till funktionerna $y = 2x+1$ och $y = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ (kvadratkomplettera för att enkelt se grafen; man ser bland annat att området består av punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ där både $x > 0$ och $y > 0$). Teckna arean av det inneslutna området med hjälp av integraler; integralerna behöver inte beräknas. (3p)

5. Beräkna den volym som uppkommer då det begränsade området mellan x-axeln och grafen till funktionen $y(x) = 1 - (x - 2)^2$, roteras runt y-axeln. (3p)

6. Beräkna följande gränsvärde: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2}$. (3p)

7. Lös följande två ekvationer: a) $y'' + y' - 2y = e^{-x}$, b) $y'' + y' - 2y = e^x$ (1+2p)

8. Formulera och bevisa Integral- och Differentialkalkylens huvudsats; båda delarna. (3p)

Maclaurinutvecklingar på baksidan, vgv.

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$