

Svara inte bara med siffra eller ja eller nej på någon fråga. Det är argumentationen och beräkningarna som ger poäng.

1. (a) Vilka är de irreducibla talen i mängden  $\mathbb{T} = 3\mathbb{N} = \{1, 3, 6, 9, \dots\}$ . (3)
- (b) Visa att unik faktoruppdelning i irreducibla tal inte gäller i  $\mathbb{T}$ . (3)
- (c) Gäller det att om ett tal har två olika faktoriseringar i irreducibla tal i  $\mathbb{T}$  så måste faktoriseringsarna ha lika många faktorer? Ge argument eller motexempel. (3)
2. Beräkna  $12 \cdot 2^{64} \cdot 2^9 + 4 \cdot 3^{43} \pmod{7}$ . Svara med en representant i intervallet 0 till 6. (3)
3. (a) Beräkna  $\phi(10000)$ . (Låt  $N = \phi(10000)$  i resten av uppgiften). (2)
- (b) Hitta inversen till 2667 i  $\mathbb{Z}_N$  genom att använda Euklides algoritm. (3)
- (c) Har 125 någon invers i  $\mathbb{Z}_N$ ? (3)
- (d) Är  $\mathbb{Z}_N$  en kropp? (2)
- (e) Lös ekvationen  $x^{2667} \equiv_N 2$  genom att upphöja bägge led i något lämpligt och använda Eulers formel. (4)
4. (a) Ta reda på exakt hur många primtal det finns som är mindre än följande tal:  $10^5$  och  $10^7$ . Använd gärna t ex Matlab eller sök på nätet. (2)
- (b) Funktionen  $\pi(x)$  i primtalssatsen ger en approximation av dessa värden. Vad ger den och hur mycket skiljer detta sig från det du fick ovan? (2)
- (c) Vilket är det största kända primtal idag och vilket är det största kända primtal som inte är ett Mersenneprimtal? (2)
5. Använd endast det vi lärt oss om en ring för att visa att bland heltalen gäller att:
  - (a)  $a \cdot 0 = 0$ . (3)
  - (b)  $(-1)(-1) = 1$ . (3)
  - (c) Visa att i en ring kan det hända att  $a \cdot b = 0$  trots att varken a eller b är noll (additiva identiteten). (2)
  - (d) Visa att i en kropp måste någon av faktorerna vara noll för att produkten skall bli noll. (3)
6. Läs artikeln om konsten att rita  $n$ -uddiga stjärnor utan att lyfta pennan.
  - (a) Finn formeln för antalet  $n$ -uddiga stjärnor som jag täckt över i artikeln och argumentera för att den är rätt. (2)
  - (b) Det går enligt artikeln ej att rita en 6-uddig stjärna utan att lyfta pennan. Ge en lista på alla de tal  $n$  sådana att det ej går att rita en  $n$ -uddig stjärna utan att lyfta pennan. (2)
  - (c) Ge exempel på fyra tal som inte motsvarar antalet sätt någon stjärna kan ritas på, dvs tal som inte ingår i värdemängden för din funktion från uppgift a). (2)
  - (d) Ge två exempel på  $n$  som gör att man kan rita precis 3 olika  $n$ -uddiga stjärnor. Rita dem? (1)
  - (e) Karakterisera alla tal som inte motsvarar antalet sätt som någon stjärna kan ritas på. (2)