Provtenta 1

16/2 2016

1 *$p = 61$ är ett primtal. Beräkna 3^{125} modulo p*

$3^{60} = 1(P)$ på grund av Fermat, således $3^{125} = (3^{60} \cdot 3^5 = 3^5(p)$. Vidare har vi $3^4 = 81 = 20(p)$ och därmed $3^5 = 3 \cdot 20 = 60 = -1(p)$. Svar -1

2 *Finn det minsta heltal $n > 1$ så att n är både en kvadrat och en kub.*

Vi har $n = a^2 = b^3$ ur vilket följer $a = c^3, b = c^2$ och därmed $n = c^6$. För $c = 2$ erhåller vi det minsta värdet, således $2^6 = 64 (= 8^2 = 4^3)$

3 *Hur många divisorer har talet 960?*

En primtalsfaktorisen ger vid handen $960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$. Antalet blir således $(6 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$ (sju val av potensen för 2, två val vardera för potenserna av 3 och 5)

4 *Ge ett kongruensvillkor på n sådant att $13|3^n - 1$*

Minsta potensen av 3 kongruent 1 modulo 13 är given av tre, ty $3^2 = 27 = 1(13)$ således följer att $3^n = 1(13)$ om och endast om $n = 0(3)$

5 *Dela upp 1001 i faktorer, beräkna $\phi(n)$ och finn det minsta n så att $1001|2^n - 1$*

$10^3 + 1 = 3^3 + 1 = 0(7), 10^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = 0(11), 10^3 + 1 = (-3)^3 + 1 = -26 = 0(13)$ Således är $7, 11, 13$ faktorer. Man finner även vid multiplikation att $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Vi finner därvidlag att $\phi(1001) = 1001 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot 1213 = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 720$.

Vidare finner vi att $2^3 = 1(7), 2^{10} = 1(11), 2^12 = 1(13)$ medan $2^2, 2^5 \neq 1(11)$ och $2^3, 2^4 \neq 1(13)$. Minsta gemensamma multipeln till $3, 10, 12$ är given av 60 således skall man välja $n = 60$

6 *Visa att om 3^n är den största potens av tre som delar $2^N - 1$ är 3^{n+1} den största potens som delar $2^{3N} - 1$.*

Ledning: Faktorisera $x^3 - 1$ med en faktor given av $x - 1$.

Vi har $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Applicera detta till $x = 2^N$ och vi antar att $n > 0$. Därav följer att $x = 1(3)$ och att $x = 1, 4, 7(9)$. Beräknar vi x^2+x+1 modulo 9 erhåller vi $3 \neq 0$ för alla tre fallen. Faktorn bidrar då alltid med ytterligare en faktor tre men aldrig med en faktor nio eller högre. Vad händer om $n = 0$ d.v.s. N är udda? Då är $3N$ också udda och ingen ny faktor av 3 tillkommer.

7 *Finn den minsta kub som kan skrivas som summan av två olika kvadrater båda skilda från noll.*

Den måste vara av formen p^3 där $p = 2$ eller $p = 1(4)$. I det första fallet finner vi $8 = 4 + 4$ som måste förkastas. Fallet $p = 5$ ger 125. Vidare har vi att

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot 4i^2 + 8i^3 = (1 - 12) + (6 - 8)i = -11 - 2i$$

vilket ger $125 = 11^2 + 2^2$