Lösningar till Övningstenta 2

1. Enda primtalsfaktorerna till $n = 6^{100}$ är $2, 3$. Således erhåller vi $n/\phi(n) = 1/(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 3$

2. Primtalsfaktoriseringen av $24024 = 24 \cdot 1001$ är given av $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Summan $\sigma_3(p^k) = \frac{p^{3(k+1)}-1}{p^3-1}$. Denna summa är multiplikativ, och således erhåller vi

$$\frac{2^{12}-1}{2^3-1}(1+3^3)(1+7^3)(1+11^3)(1+13^3) = 4095 \cdot 4 \cdot 343 \cdot 1332 \cdot 2197$$

3. $(\frac{35}{113}) = (\frac{5}{113})(\frac{7}{113})$. Vidare ger kvadratisk reciprocitet $(\frac{5}{113}) = (\frac{3}{5}) = (\frac{2}{3}) = -1$ och $(\frac{7}{113}) = (\frac{1}{7}) = -1$. Således $(\frac{35}{113}) = -1$

4. Om $p|x^2 - 3y^2$ gäller antingen att $p|gcd(x,y)$ eller att $(\frac{3}{p}) = 1$. Vi har $(\frac{3}{11} = -(\frac{2}{3}) = 1$ Så vi kan inte utesluta. Vi har att $11|5^2 - 3 \cdot 1^2$ I själva verket att $5^2 - 3 \cdot 1^2 = 2 \cdot 11$. Kanske en variation av 'descent'. Eftersom $3, 11$ udda måste exakt ett av x, y vara jämnt. Om $x = 0(2)$ följer $y^2 = 1(4)$ och således $x^2 - 3y^2 = 1(4)$, på samma sätt om $y = 0(2)$ följer $x^2 = 1(4)$ och således $x^2 - 3y^2 = 1(4)$ men $11 = 3(4)$.

5. Ur ledningen följer att -2 är en kvadrat mod q. Om $p = 3(4)$ följer även att $q = 2 \cdot 3 + 1 = 3(4)$. Således är 2 inte en kvadratisk residy modulo q. D.v.s. $q = 3, 5(8)$. Vi har $p = 3, 7(8)$ (eftersom $p = 3(4)$ och därmed $q = 2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 7 + 1 + 7(8)$. Motsägelse. Således $q|2^p - 1$

6. De relevanta $\phi(n)$ utgöres av $\phi(2) = 1, \phi(4) = 3, \phi(8) = 4, \phi(3) = 2, \phi(9) = 6, \phi(5) = 4, \phi(7) = 6, \phi(13) = 2$ Från $12 = 12, 12 \cdot 1$ erhåller vi $13, 2 \cdot 13 = 26$. Från $6 \cdot 2(\cdot 1)$ erhåller vi $7 \cdot 4 = 28, 7 \cdot 3 = 21, 9 \cdot 4 = 36, (7 \cdot 3 \cdot 2 = 42)$, vidare från $4 \cdot 3(\dot{1})$ följer ingenting ty $\phi(n) = 3$ är en omöjlighet. Sammanfattningsvis $13, 21, 26, 28, 36, 42$

7. a) Om $k \leq 24$ kan vi inte ha ett intervall av längd > 24 mellan två bussavgångar. Vidare skall $(k, 24) = 1$

b)Det finns $7 \cdot 24 = 168$ timmar på en vecka. Låt bussen börja vid midnatt och välj k så att $6k \leq 168$. Om k är maximalt d.v.s $k = 28$ kommer en buss avgå 0:00 på måndag, 4:00 på tisdag, 8:00 på onsdag, 12:00 på torsdag, 16:00 på fredag och 20:00 på lördag, men ingen på söndag. Hade intervallet varit kortare hade en buss avgått på söndag också. Men å andra sidan om vi väljer k maximalt så att $5k < 168$ d.v.s. $k = 33$ kommer vi ha bussavgångar sex dagar i veckan: 0:00 på måndag, 9:00 på tisdag, 18:00 på onsdag 3:00 på fredag 12:00 på lördag och 21:00 på söndag. Alltså sex avgångar. Men förskjuter vi avgången på måndag med 4 timmar tappar vi söndagsavgången, och har bara fem dagar med avångar. Förskjuter vi med $37 = 33 + 4$ förlorar vi två avgångar men vi har då redan efter en förskjutning av 33 fått en ny avgång i början av veckan.

Svar: k kan väljas mellan 28 och 33.