MATEMATISKA VETENSKAPER

MMGN00
Introduktionskurs för naturvetare

Jan Alve Svensson

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMGN00/S10/

Innehåll (1,5 hp)

- Olika tal
- Algebra
- Funktioner, särskilt logaritmer och exponentialfunktioner
- Derivata, med användning
- Primtiva funktioner, differentialekvationer

Litteratur

Särskilt framtaget material

Undervisning

Fem tillfällen med föreläsningar (2h) och självverksamhet (2h)

Tre presentationer

Examination

Skriftlig tentamen 28 augusti 8:30 – 11:30
Sex uppgifter som vardera kan ge 6p.
Gräns för godkänt är 15p.
Inga hjälpmedel

De naturliga talen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Fyra operationer: kan addera och multiplicera,
men inte alltid subtrahera och dividera

$15+21=36,\ 11\cdot 31=341,\ 14-7=7,\ 91/7=13,$
men $14-17$ och $91/17$ går inte.

De fyra operationerna kan mixas på många sätt

$$15+21\cdot 3-21/3,$$

Konvention: Multiplikation och division utförs före addition och subraktion

I övrigt gäller läsriktningsprioritet

$$6+3\cdot 14/2-1-5\cdot 4=6+42/2-1-20=$$

$$=6+21-1-20=6$$

De naturliga talen

Parenteser används för att kringgå prioritet

$$16-7-4 \text{ och } 16-(7-4)$$

Uttryck inom parenteser utförs först. Innersta först!

$$30+(5\cdot 7-\boxed{(1+3\cdot 9)}-2)\cdot(1+4/2)$$

Räkneregler:

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ och } a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

Men $14-(2-7)\neq(14-2)-7$

Heltalen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$

Nu är subtraktion alltid möjlig

$$-(-a) = a$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \qquad (-2) \cdot (-3) = 6$$

Prioritet som tidigare

$$3 - \boxed{((-2)(3-(-4)) + (3-(15/5))}(1-2(2 \cdot 7 - 13))$$

De rationella talen

Alla kvoter $\frac{a}{b}$, där a och $b \neq 0$ är heltal $\qquad \frac{4}{13}$

Likhet $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ precis när } ad = bc}$

$$\frac{-51}{17} = \frac{12}{-4} = \frac{-3}{1} = -3$$

Förkortning/förlängning

$$\boxed{\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}}$$

Enklaste form

Faktorisering: skriva heltal som produkt av andra

$$357 = 7 \cdot 51 = 7 \cdot 3 \cdot 17$$

De rationella talen

Förenkla bråk:

hitta gemensamma faktorer i täljare och nämnare

$$\frac{1820}{140}$$

Bråk kan adderas/subtraheras och multipliceras/divideras

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},}$$

$$\frac{4}{13}+\frac{2}{91}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{14}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}}$$

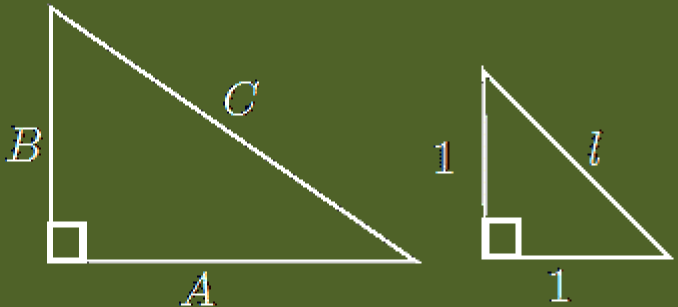
Kan inte dela med 0!

$$\frac{26}{5}\Big/\frac{13}{15}$$

De reella talen

De rationella talen räcker inte för att mäta sträckor!

Man kan visa: finns inget heltalsbråk $\frac{a}{b}$ så att $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$



Pythagoras:

$A^2 + B^2 = C^2, l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Behöver reella tal. Motsvarar punkter på tallinjen.

Reella tal kan(?) skrivas som oändliga decimalutvecklingar

$$n, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$$\frac{28}{9} = 3,11111\ldots$$

Reella tal kan adderas/subtraheras

och multipliceras/divideras (!)

Potenser

$\boxed{\text{Efter fem timmar: } (1,2)^5 M}$

En bakteriekoloni växer 20% per timme. Hur stor efter fem?

M antalet från början. Efter en timme $M + 0,2M = 1,2M$,

efter två $1,2 \cdot 1,2M$, $\ldots$, efter fem $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2M$

Behöver beteckning för upprepad multiplikation med ett och samma tal.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ st} \qquad a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Räkneregler

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Förenkla $\dfrac{14^4 \cdot 21^6}{6^4 \cdot 9 \cdot 7^{11}}$

Faktorisera!

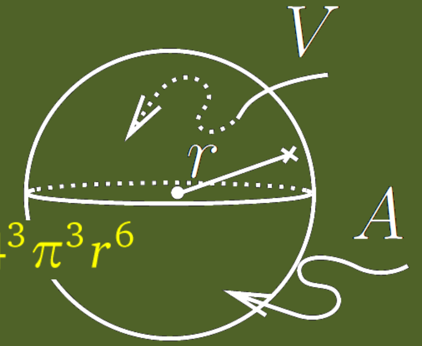
Exponent

Bas a^n

Potens

Potenser

Ett klot har volymen V. Vad är då (mantel-) arean (A)?



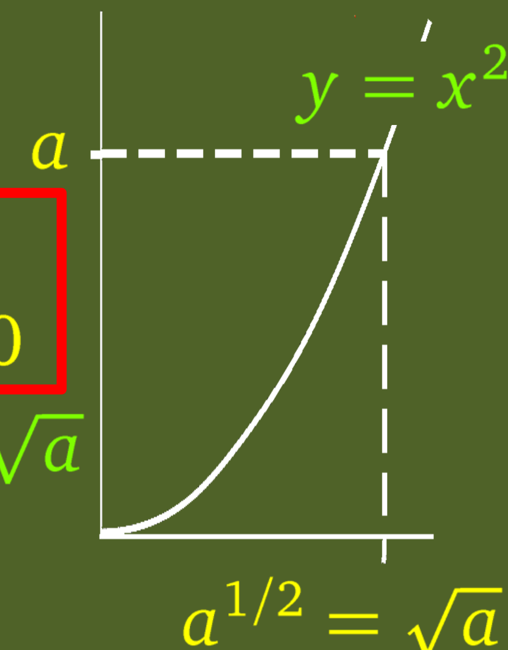
Har $V = 4\pi r^3/3$ och $A = 4\pi r^2$ Ger $V^2 = 4^2\pi^2 r^6/3^2$ och $A^3 = 4^3\pi^3 r^6$

Får $\dfrac{A^3}{V^2} = \dfrac{4^3\pi^3 r^6 3^2}{4^2\pi^2 r^6} = 36\pi$ $\boxed{\text{Och } A^3 = 36\pi V^2}$

Vill ta båda sidor upphöjt i $1/3$ så att VL blir $(A^3)^{1/3} = A$

Börjar med $a^{1/2}$. Vill att $(a^{1/2})^2 = a$.

Så $a^{1/2}$ ska lösa ekvationen $x^2 = a$.



$\boxed{\text{Definerar } a^{1/2} = \sqrt{a} \text{ som den icke-negativa lösningen till } x^2 = a.\ \text{Bara definierat om } a \geq 0}$

Ekvationen $x^2 = a$ har TVÅ lösningar: $x = \pm\sqrt{a}$

Beräkna $\sqrt{196}$

Har $196 = 4 \cdot 49 = (2 \cdot 7)^2$. Ger $\sqrt{196} = 2 \cdot 7 = 14$.

Det är **FEL** att säga $\sqrt{196} = \pm 14$.

Däremot har ekvationen $x^2 = 196$ lösningarna $x = \pm\sqrt{196} = \pm 14$.

Potenser

På samma sätt som $a^{1/2}$ definieras $a^{1/n}$ (eller $\sqrt[n]{a}$), men med ekvationen $x^n = a$ i stället.

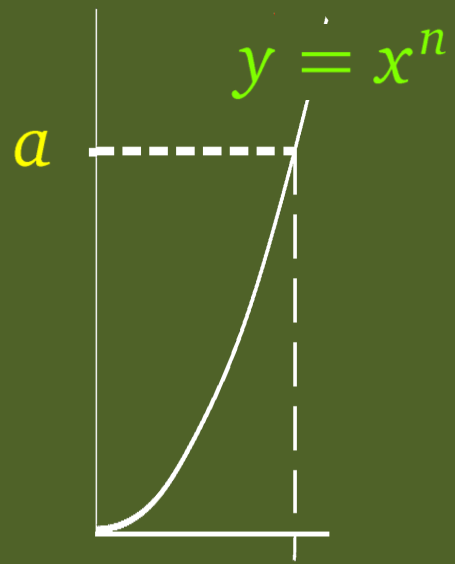
Har alltså $(a^{1/n})^n = a$. Till sist $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$. $a^{\text{rationellt tal}}$

Samma räkneregler som tidare gäller!

Exempel Förenkla $(\sqrt{27})^{2/3}$

Kan också ge mening åt $a^{\text{reellt tal}}$ men kräver mer matematik.

Exempel Förenkla $((\sqrt{4})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$



$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$