

MATEMATISKA VETENSKAPER



MMN00

Introduktionskurs för naturvetare

Jan Alve Svensson

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMGN00/S10/

Algebra Räkning med bokstäver.

Kvadreringsrelger: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Konjugatregeln: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Kan ses som **utveckling** av VL, eller **faktorisering** av HL!

Skillnad mellan **formler** (omskrivningar) och **ekvationer**.

Ekvationen $x^2 = x + 2$, men omskrivningen $x^2 - 9y^4 = (x - 3y^2)(x + 3y^2)$

Exempel Utveckla $(2 + y^2)(2 - y^2)(4 + y^4)$

Exempel Faktorisera $18x^2y^7 - 8x^4y$

Exempel Förenkla $\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 6x + 9}$

Kvadratkomplettering Omskrivning av $x^2 + ax + b$

$$\underline{x^2 + ax + b} = \underline{(x + a/2)^2 - (a/2)^2 + b}$$

Exempel Kvadratkomplettera $x^2 + 5x + 9$

Algebra

Kvadratkomplettering är mycket användbart!

Exempel Bestäm minsta värdet av $4x^2 - 12x + 8$

Exempel Lös ekvationen $0 = x^2 + 6x + 7$

Formel för andragradare: $0 = x^2 + px + q$ har lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Exempel Lös ekvationen $(3 - x)(x + 8) = x^2 + 12$

Funktioner

En funktion är en regel som till vissa reella tal ordnar (till vart och ett av dem) ett bestämt värde

Regeln betecknas ofta f och $f(x)$ är då **värdet** av regeln i talet x

De x som f kan användas på utgör tillsammans funktionens **defintionsmängd**.

Olika sätt att ange en funktion:

- Ange regeln i ord.

T.ex. $f(t)$ är antalet bakterier i en viss koloni vid tidpunkten t .

Vad betyder $f(10) = 23\,431$?

- Ange regeln med en formel

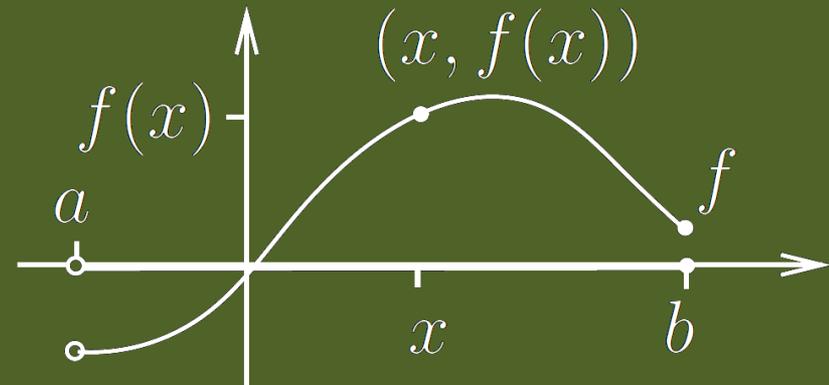
T.ex. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x-1}$.

Definitionsmängd:

alla reella tal mellan -1 och 1 utom $1/2$.

$$f(-1/2) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

En funktion f har en **graf** som består av alla punkter $(x, f(x))$.



Funktioner

Exempel På en ö finns rävar och kaniner. Sätt $f(x)$ till antalet kaniner om x är antalet rävar. Detta är inte en funktion!

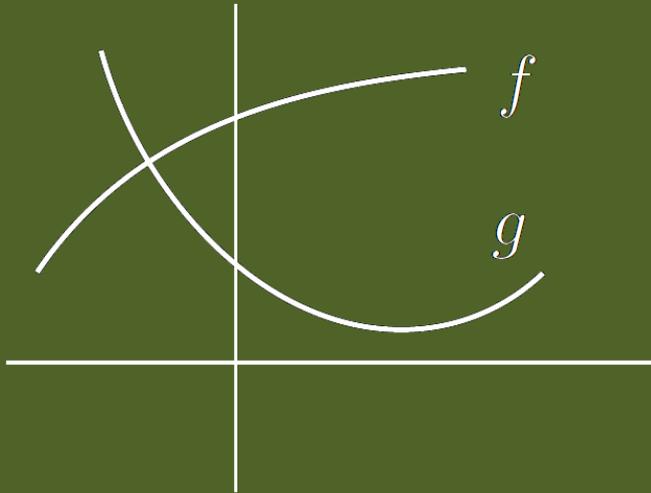
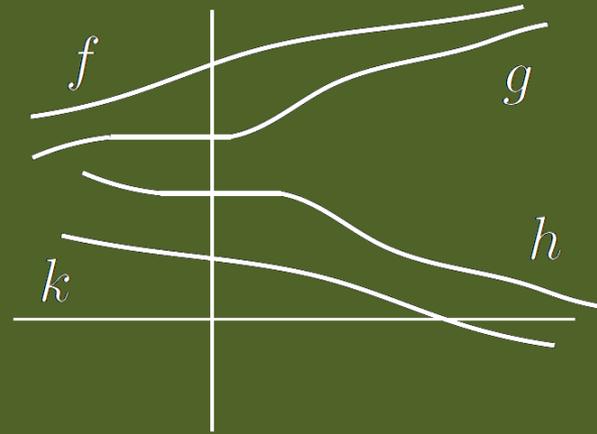
Exempel Ideala gaslagen $pV = nRT$. För fixt V är p en funktion av T .
För fixt T är p en funktion av V .

Växande funktioner: f och g

Avtagande funktioner: h och k

Strängt växande funktion: f

Strängt avtagande funktion: k



Konkav funktion: f

Konvex funktion: g

Linjära funktioner

$$f(x) = kx + m$$

Grafen är en rät linje.

Exempel Kostnad för vatten/avlopp linjär funktion av volymen x . Vet: 1m^3 kostar 1000 kr och 2 kostar 1800 kr. Vad kostar 3?

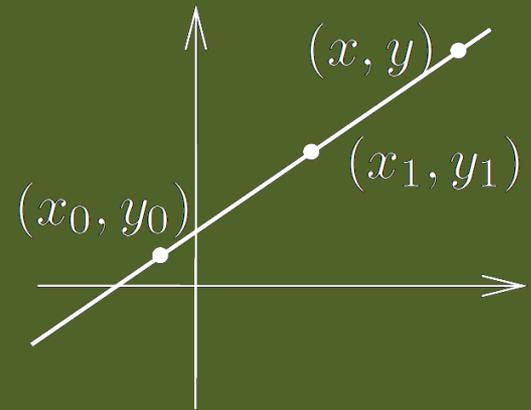
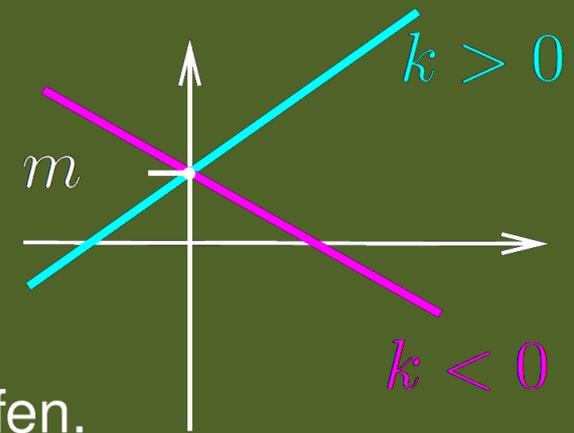
En linjär funktion bestäms av två punkter på grafen.

Riktningskoefficienten $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Tvåpunktsformeln $k = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Exempel Formel för den linjära funktion f vars graf går genom $(-3, 2)$ och $(2, -4)$.

$$f(x) = kx + m$$



Polynom

Monom: x , $3x^4$, $\sqrt{5}x^7$.

Allmänt: kx^n där k ett reellt tal och n ett naturligt.

kx^n har **grad n** (om $k \neq 0$).

Polynom: en summa av monom.

T.ex $p(x) = 2 + x + x^3/2$ är ett polynom av grad **3**.

Av intresse att hitta **nollställen och teckenväxlingar.**

Faktorsatsen: polynomet p har

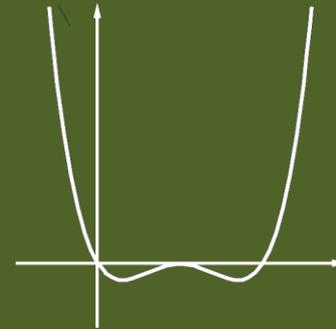
nollstället a ($p(a) = 0$) precis när det har faktorn $x - a$.

Exempel 

$p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$ har nollstället **2**.

Bestäm tecknet för olika x .

Skissa grafen.



Rationella funktioner

En funktion som ges av en kvot mellan två polynom är rationell.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Täljare
Nämnare

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - x}$$

En rationell funktion är noll precis när täljaren är noll.
Den är definierad utom i de tal där nämnaren är noll.
Teckenväxling beror på både täljare och nämnare.

Exempel 

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - x^2}$$

Bestäm nollställen och tecknet för olika x .

Skissa grafen.

