MATEMATISKA VETENSKAPER

MMN00
Introduktionskurs för naturvetare

Jan Alve Svensson

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMGN00/S10/

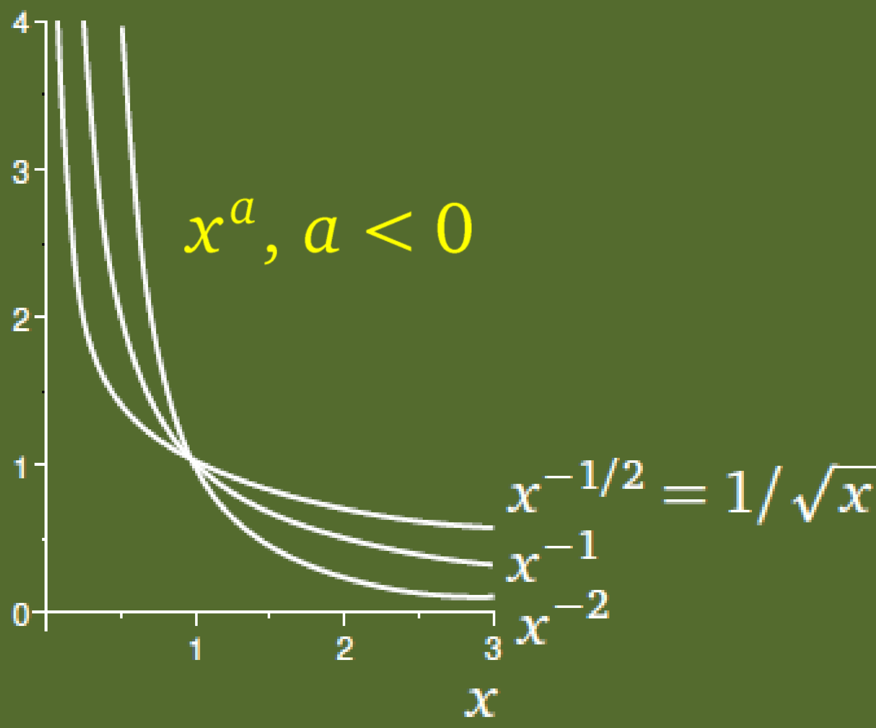
3

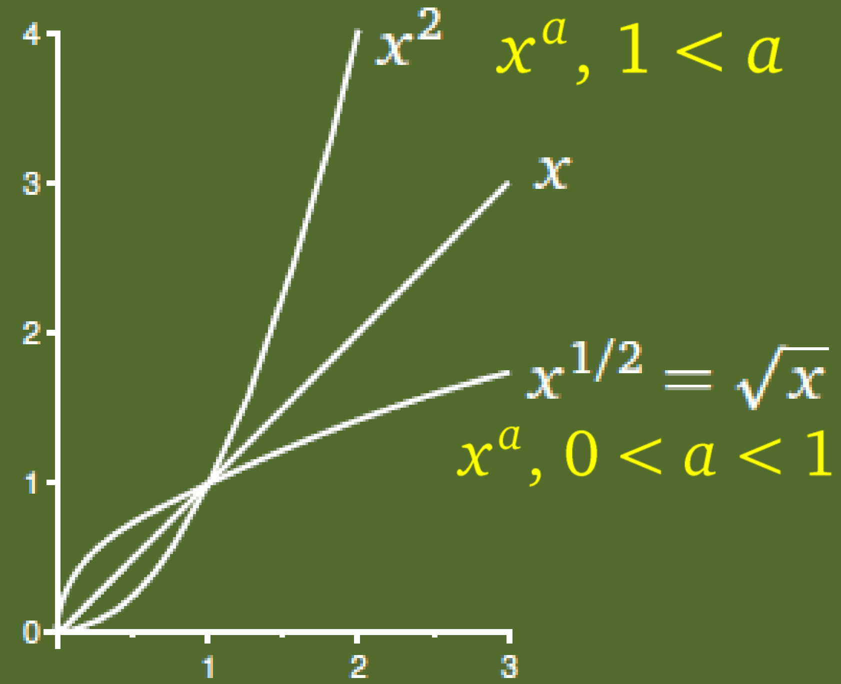
Potensfunktioner

Funktion av formen $f(x) = kx^a$ där k och a är givna,
är en potensfunktion .

T.ex. $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{1/2}$, $f(x) = \sqrt{3}x^{-2}$, $f(x) = 13x^5$

Är alltid definierade för $x > 0$, men kan vara definierad för fler tal.





Potensfunktioner

Potensfunktion är bestämd av två punkter på grafen

Exempel Bestäm en formel för potensfunktionen f som är sådan att $f(2)=10$ och $f(4)=5$.

Exponentialfunktioner

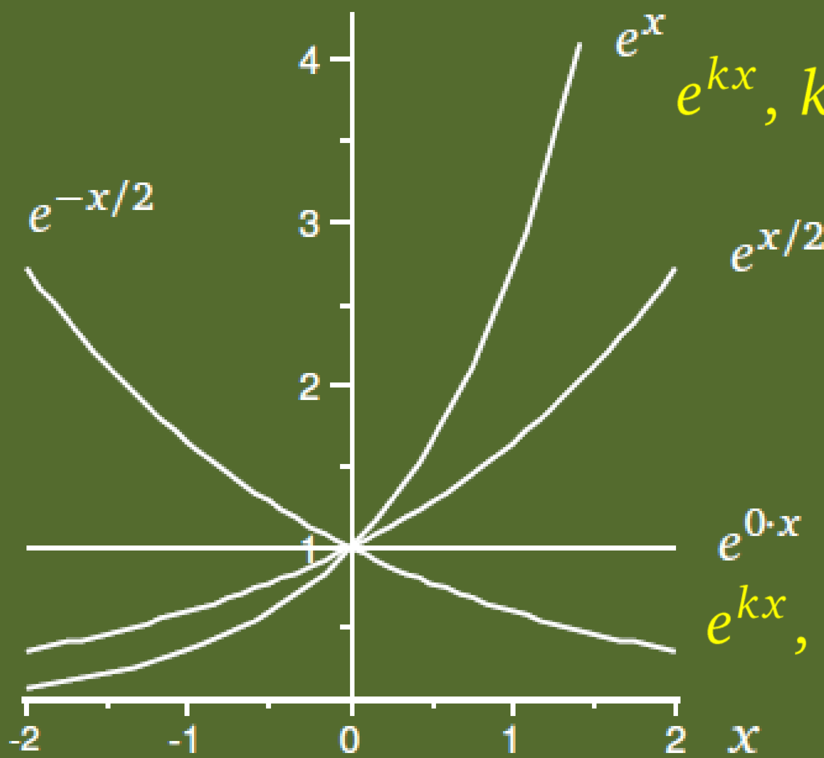
Funktion av formen $f(x) = ma^{kx}$ där k, m och $a > 0$ är givna, är en exponentialfunktion .

Är alltid definierade för alla reella tal

Eftersom $a^{kx} = (a^k)^x$ får man $f(x) = mb^x$ om man sätter $b = a^k$

I särklass vanligast exponetialfunktionerna är de där $a = e$.

$e \approx 2,7183$



e^{kx}, $k > 0$

Exponentiellt växande

e^{kx}, $k < 0$

Exponentiellt avtagande

Exponentialfunktioner

Exponentialfunktion är bestämd av två punkter på grafen

Exempel En exponentialfunktion har en graf som går genom punkterna $(-2,1)$ och $(1,27)$. Bestäm en formel för funktionen.

Räkneregler för potenser ger

$$f(x_1+x_2)=a^{k(x_1+x_2)}= \\ =a^{kx_1}a^{kx_2}=f(x_1)f(x_2)$$

En exponentialfunktion med $m=1$ omvandlar summor till produkter.

Kan därför känna igen exp-funktion från data jämnt fördelade mätpunkter

x_0	$x_0+\Delta$	$x_0+2\Delta$	$x_0+3\Delta$	$x_0+4\Delta$	$x_0+5\Delta$
$f(x_0)$	$f(x_0)f(\Delta)$	$f(x_0)f(\Delta)^2$	$f(x_0)f(\Delta)^3$	$f(x_0)f(\Delta)^4$	$f(x_0)f(\Delta)^5$

Kvoten mellan två på varandra följande mätdata är konstant ($f(\Delta)$).

För en linjär funktion är skillnaden mellan två på varandra följande mätdata är konstant.

Exponentialfunktioner

Mängden av ett radioaktivt ämne är exponentiellt avtagande i tiden.

Man anger halveringstiden T.

Om kvantiteten är M vid tiden $t = 0$ är den då

$$f(t) = M \cdot 2^{-t/T} \qquad \text{vid tiden } t.$$

Exempel Ett radioaktivt ämne har halveringstiden 10 år.

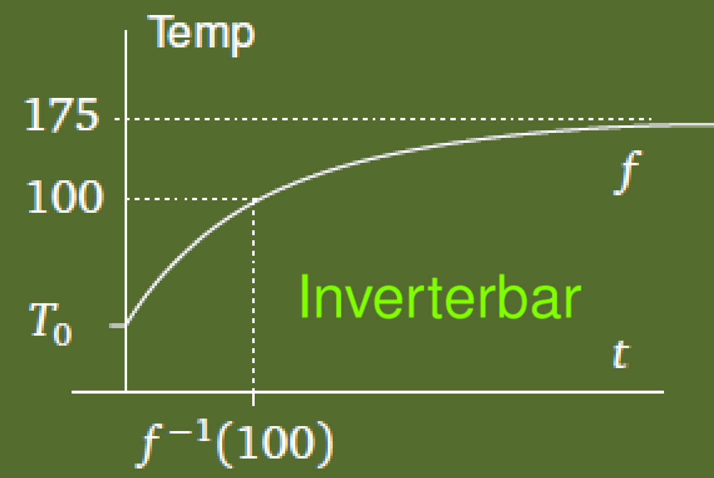
Hur stor andel återstår efter 100 år?

Invers till funktioner

En (kall) stek placeras i en varm ugn.

Stekens temperatur är då en funktion av tiden.

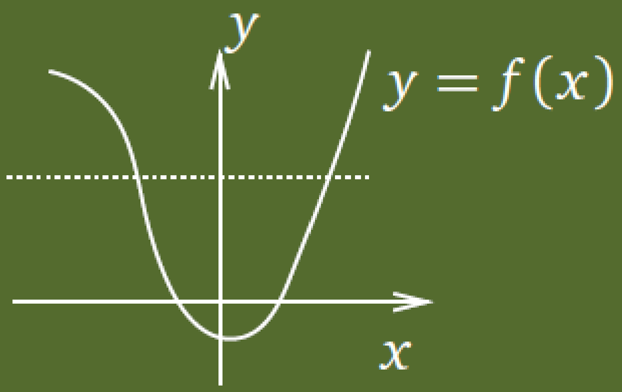
Men tiden (den varit i ugnen) är också en funktion av temperaturen.



Om $f(t)$ är stekens temperatur vid tiden t , så är $t = f^{-1}(T)$ tiden då temperaturen är T.

Funktionen f^{-1} kallas inversen till f.

De flesta funktionerna går inte att invetera!



En funktion är inverterbar om ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning x för varje y.

Inte inverterbar

I så fall får man en ny funktion genom att sätta $x = f^{-1}(y)$ precis när $f(x) = y$.

Man har $\boxed{y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \text{ och } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.}$

f och f^{-1} tar ut varandra.

Invers till funktioner

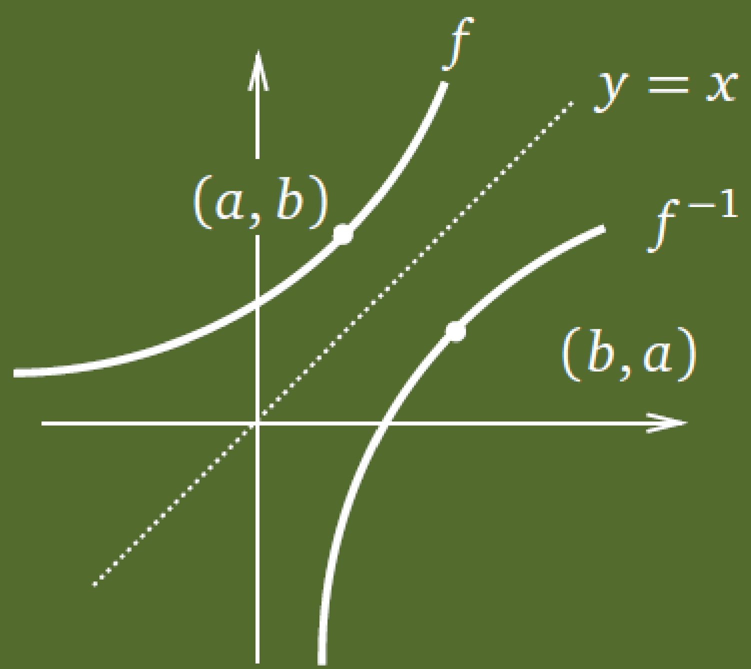
Alla strängt växande och strängt avtagande funktioner är inverterbara! För att avgöra om en funktion är inverterbar eller inte ska man alltså försöka lösa ekvationen $y = f(x)$, där x är obekant.

Exempel Funktionen $f(x) = 3x + 6$ är inverterbar. $f^{-1}(x) = x/3 - 2$

Exempel Funktionen $f(x) = x + x^{-1}$ är inte inverterbar inverterbar.

Om (a, b) är på grafen till f, så är $b = f(a)$.
Men då är $a = f^{-1}(b)$, så (b, a) är på grafen till f^{-1}.

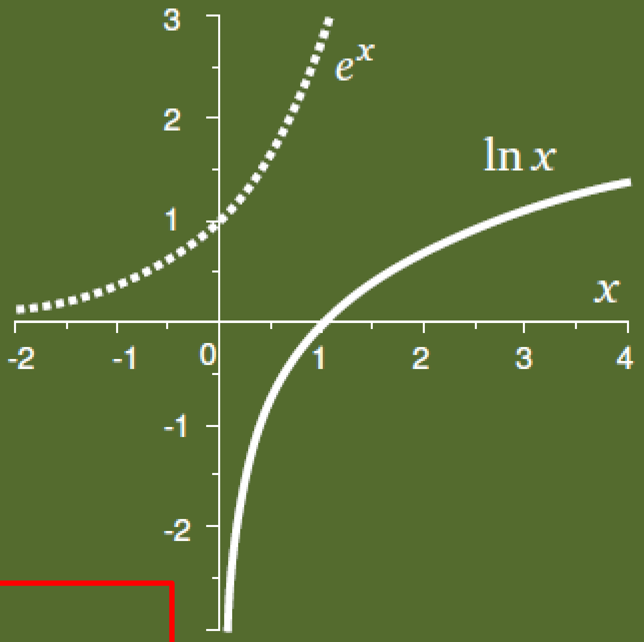
Grafen till f^{-1} är spegelbilden till grafen av f i linjen $y = x$.



Naturliga logaritmen

Exponentialfunktionen e^x är strängt växande, så inverterbar.

Inversen kallas den naturliga logaritmen och betecknas $\ln x$.



Det betyder att $\boxed{\ln y = x \text{ precis när } y = e^x}$

$$\ln 1 = 0\,, \qquad \ln e = 1,$$
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b\,, \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\,,$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a\,, \qquad \ln(a^c) = c\ln a\,,$$
$$\ln(e^a) = a\,, \qquad e^{\ln a} = a\,,$$

Exempel Förenkla $3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln(\sqrt{6})$.

Andra logaritmer

$\log_2 8 = 3$

Exponentialfunktionen a^x är strängt växande,
om $a > 1$ och strängt avtagande om $0 < a < 1$.

Inversen till a^x kallas a-logaritmen och betecknas $\log_a x$.
Det betyder att $\boxed{\log_a y = x \text{ precis när } y = a^x}$

Liksom $\ln$ omvandlar $\log_a$
produkter till summor och kvoter till differenser.

Exempel Förenkla $\log_{10} 50 - \log_{10} 0,5$.

Behöver allstå bara veta hur grafen till e^x ser ut.

Alla exponentialfunktioner ma^{kx} kan skrivas med e som bas.

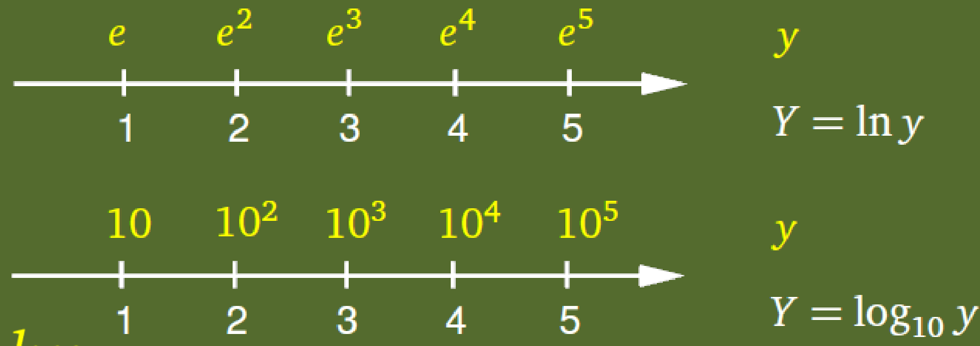
$$ma^{kx} = m(e^{\ln a})^{kx} = me^{(k \ln a)x}$$

Likaså kan alla logaritmer skrivas med $\ln$.

Vi har $\boxed{\log_a y = x}$ när $y = a^x$.
Logaritmering av det sista ger $\boxed{\ln y = x \ln a}$, så

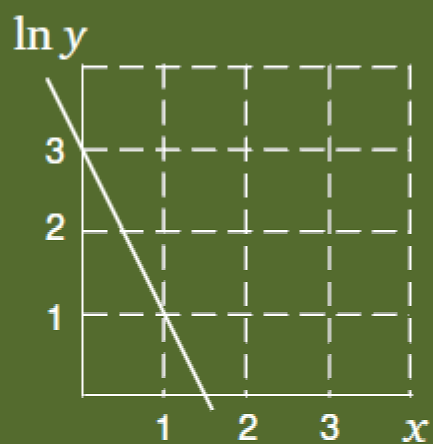
$$\boxed{\log_a y = x = \frac{\ln y}{\ln a}}$$

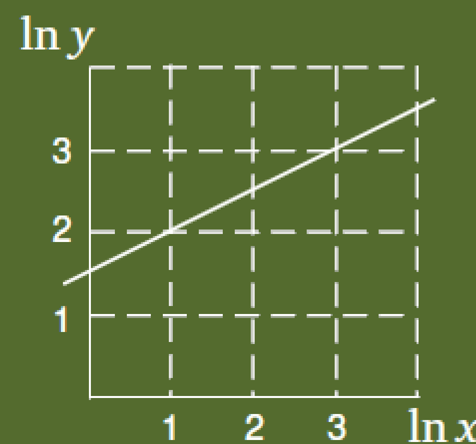
Logaritmisk skala



$y = me^{kx}$ ger $Y = \ln y = \ln m + kx$.
$Y = \ln m + kx$ rätlinje i koordinatsystem med x och Y längs axlarna.
Logaritmisk skala längs y-axeln: graf till exp-funktioner är räta linjer.

Exempel Vilken är funktionen?





$y = kx^a$ ger $Y = \ln y = \ln k + a \ln x = \ln k + aX$.
$Y = \ln k + aX$ rätlinje i koordinatsystem med X och Y längs axlarna.
Logaritmisk skala längs båda axlarna: graf till potensfunktion är rät linje.